



STUDENTE..... classe 5 sez..... 19.05.2005

**SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME DI STATO ANNO SC. 2004/05**

*Risolvere uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario indicando sul testo la scelta effettuata.*

**PROBLEMA 1.**

Sono date due circonferenze di centri  $O$  e  $O'$ , tangenti esternamente in  $A$  e di raggi  $OA=3r$  e  $O'A=r$ . Condurre per  $A$  due rette, tra loro perpendicolari, che incontrino, oltre che in  $A$ , la circonferenza di centro  $O$  in  $M$  e in  $N$  e quella di centro  $O'$  in  $M'$  e  $N'$ .

- 1) Dimostrare che i triangoli  $MAN$  e  $M'AN'$  sono simili e che il quadrilatero  $MN'M'N$  è un trapezio.
- 2) Esprimere il perimetro del trapezio  $MN'M'N$  in funzione di  $AM'$ , determinando per quale valore di  $AM'$  tale perimetro è massimo e il valore stesso del perimetro massimo.
- 3) Studiare la funzione  $f(x)$  che descrive la variazione dell'area del trapezio  $MN'M'N$ , sempre in funzione di  $AM'$ , rappresentare il grafico di  $f(x)$  in un riferimento cartesiano, dopo aver verificato che essa ha equazione  $y = 8x\sqrt{4r^2 - x^2}$ .  
 Si confronti, quindi, il valore che rende massima l'area con quello che rende massimo il perimetro.
- 4) Trovare l'area della parte di piano (trapezoide) compresa fra il grafico di  $f(x)$ , l'asse delle ascisse e le rette di equazione  $x = 0$  e  $x = 2r$ . Che significato si può dare all'altezza del rettangolo con base uguale a quella del trapezoide ed avente la stessa area di quest'ultimo?

**PROBLEMA 2.**

In un sistema di assi cartesiani ortogonali  $xOy$ , individuare i vertici di un triangolo  $ABC$  di cui si conoscono l'ortocentro  $H(0; -5/3)$  e le rette  $3x+y-3 = 0$  e  $3x+5y-15 = 0$  a cui appartengono rispettivamente i lati  $AC$  e  $CB$ .

- 1) Determinare l'equazione della retta  $r$ , passante per  $A$ , che divide il triangolo  $ABC$  in due parti le cui aree hanno prodotto massimo.
- 2) Generalizzare il problema ponendo il prodotto uguale a  $k^2$ , essendo  $k$  un parametro reale dato e discutere rispetto ad esso.
- 3) Indicata con  $F$  l'intersezione della retta  $r$  con il lato  $BC$ , determinare sul segmento  $AF$  un punto  $P$  in modo tale che le rette  $CP$ ,  $BP$  e  $AF$  dividano il triangolo  $ABC$  in sei triangoli equivalenti.
- 4) Trovare l'equazione della parabola  $y = ax^2 + bx + c$ , di vertice  $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  e passante per il punto  $A$ .
- 5) Calcolare la misura delle aree in cui la parabola divide il triangolo  $ABC$ .

**QUESTIONARIO**

- 1) Risolvere l'equazione  $\int_0^x (2 \cos 2t - \sin t - 3t) dt = 1 - \frac{3x^2}{2}$
- 2) Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = \arcsen \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctg x$ .

Dal risultato quali conseguenze se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?

- 3) Uno specchio sferico di ampiezza  $20^\circ$  ha il volume, approssimato a meno di  $10^{-2}$ , uguale a  $169,65 \text{ cm}^3$ . Si determini il raggio della sfera cui lo specchio appartiene. Supposto che la sfera sia di ferro (peso specifico = 7,8) e pesi 21,65 kg si stabilisca se essa è piena o contiene al suo interno qualche cavità.
- 4) Determinare una funzione  $f(x)$  sapendo che:
- o La tangente nell'origine al grafico di  $f(x)$  ha equazione  $y = -x$
  - o Il grafico della derivata di  $f(x)$  ha, in ogni suo punto  $P$ , il coefficiente angolare della tangente uguale al triplo del quadrato dell'ascissa di  $P$ .
- 5) La retta  $r$  è perpendicolare nel vertice  $A$  al piano del quadrato  $ABCD$ . Indicato con  $E$  un qualsiasi punto di  $r$ , distinto da  $A$ , dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice  $E$  e base  $ABCD$  sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti.
- 6) Determinare il più grande valore del parametro reale  $m$  per cui il valore dell'integrale:  
$$\int_0^m \frac{2x - 3m}{x - 2m} dx$$
 non supera 24.
- 7) Dopo aver dimostrato che la funzione  $f(x)$ , di equazione  $y = \frac{x}{x^2 + 9}$ , non è invertibile, trovare una sua restrizione a un intervallo del tipo  $[-a, a]$  che sia invertibile, determinando in particolare il valore di  $a$  per cui l'ampiezza dell'intervallo sia la più grande possibile e l'espressione dell'inversa in tale intervallo.
- 8) Una funzione  $f(x)$  ha come derivata  $\log^3 x$ . Qual è la derivata di  $f(3x^2)$ ? Fornire una esauriente spiegazione.
- 9) Determinare le equazioni delle tangenti al grafico della funzione di equazione  
$$y = \frac{2}{(x+1)^2 + 3}$$
 nei punti di flesso.
- 10) Enunciare e dimostrare il teorema delle tre perpendicolari illustrandolo con opportuni disegni.

*L'elaborato deve essere consegnato entro le ore 12.50. Non è possibile lasciare l'Istituto prima delle ore 12.*

*È tassativamente vietato l'uso dei cellulari*

*È ammesso l'uso della calcolatrice non programmabile; è vietato consultare appunti, testi e manuali.*