ISTITUTO DI ISTRUZIONE SUPERIORE – GALLARATE
LICEO SCIENTIFICO STATALE “Leonardo da Vinci”
LICEO CLASSICO "Giovanni Pascoli"

COGNOME____________________NOME____________________classe 5 sez___ 21.05.2013

SIMULAZIONE ESAME di STATO LICEO SCIENTIFICO tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario, indicando sulla griglia il problema e i quesiti scelti.

P1	P2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10

Problema 1

Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AC, con $\overline{BC}=2$. Tracciata la bisettrice dell’angolo $A\hat{C}B$, indicare con D il punto in cui interseca AB.

a. Dimostrare che deve essere $\overline{BD}<2$. Porre poi $\overline{BD}=x$ ed esprimere $y=\overline{AD}$ in funzione di x verificando che si ottiene $y=f(x)=\dfrac{x^3+4x}{4-x^2}$. Studiare la funzione ottenuta e tracciarne il grafico indipendentemente dalle limitazioni geometriche, mettendo successivamente in evidenza il tratto relativo al problema.

b. Utilizzare il grafico di $y=f(x)$ per dimostrare che l’equazione $x^3+2x^2+4x-8=0$ ammette una sola soluzione x_0. Determinare un intero z per il quali risulti $z<x_0<z+1$

c. Determinare l’area del triangolo mistilineo individuato dalla funzione $y=f(x)$, dall’asse delle ascisse e dalla retta parallela all’asse delle ordinate passante per il punto $P\,(x_0\,;0)$.

d. Dedurre infine dal grafico della funzione $y=f(x)$ quello della funzione $y=g(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+4x}{4-x^2}}$ prestando particolare attenzione alla derivabilità.

Problema 2

In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo ABC rettangolo in C; l’ipotenusa si proietta in $A'B'$ sulla tangente in C.

a. Esprimere per mezzo di r e di $A\hat{B}C=x$ il volume V_1 del tronco di cono generato dalla rotazione del trapezio $AA'B'B$ intorno a $A'B'$ e il volume V_2 della sfera di diametro $A'B'$.

b. Studiare e rappresentare graficamente nell’intervallo $[0\,;\pi]$ la funzione $y=\dfrac{V_1}{V_2}$ verificando che si ottiene $y=\dfrac{4-sen^2\,2x}{2\,sen^2\,2x}$ ed evidenziando l’andamento della funzione in riferimento al problema geometrico proposto.

c. Nell’intervallo $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ intersecare la funzione trovata con la retta $y=\dfrac{13}{6}$. Determinare l’area della parte di piano compresa fra tale retta e la funzione.

d. Determinare infine $A\hat{B}C=x$ in modo che il rapporto fra le aree di base del tronco di cono sia pari a 1. Disegnare il solido corrispondente alla soluzione trovata e individuare le sue caratteristiche.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l’uso di calcolatrici non programmabili.

Quesito 1
Data l'ellisse di equazione $9x^2+16y^2=144$, tracciare una corda PQ parallela all'asse x in modo che risulti massima l'area del trapezio avente come basi la corda PQ e l'asse maggiore dell'ellisse.

Quesito 2
Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0$

Quesito 3
Dopo aver determinato il dominio della funzione $y=\ln arc\,sen\sqrt{1+5x^2}$, calcolare la derivata e verificare che la funzione non è derivabile per alcun valore di x.

Quesito 4
E' data la parabola di equazione $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$. Sia V il vertice della parabola e A il punto in cui tale parabola interseca l'asse y. Determinare la misura del volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo mistilineo OVA attorno all'asse y, essendo O l'origine degli assi cartesiani.

Quesito 5
E' data una funzione di dominio $D=\Re-\{\pm 3\}$, che interseca l'asse x nei punti $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$ e che ha come asintoti verticali le rette $x=\pm 3$ e come asintoto obliquo la retta $y=x+2$. La sua espressione analitica è (motivare in modo esauriente la scelta): a) $y=\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^2-9}$ b) $y=\frac{(x^2-9)\cdot(1-x^2)}{x^2+9}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-9}$ d) $y=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-9}$ e) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Quesito 6
La concentrazione C di un farmaco nell'organismo umano dopo un tempo t dall'assunzione è data dalla seguente funzione: $C(t)=\frac{5t}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2}$ dove k è un parametro costante. Trovare il valore di k, sapendo che la massima concentrazione è raggiunta dopo $t=6\ ore$.

Quesito 7
Il triangolo ABC ha $A\hat{B}C=\frac{\pi}{4}$ e $\overline{AB}=28\sqrt{2}$. La mediana AM misura 35. Senza l'utilizzo del calcolatore provare che esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni e determinare l'area dei due triangoli.

Quesito 8
L'equazione risolvente un dato problema è: $(2k-1)\,tg^2x+2\,tg\,x-1=0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $30°\le x\le 60°$. Discutere per quali valori di k le radici dell'equazione sono soluzioni del problema.

Quesito 9
Le coordinate cartesiane di un punto materiale P, mobile in un piano cartesiano, sono date dalle seguenti equazioni in funzione del tempo t:

$$\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=e^{-t}+2t \end{cases}$$

Determinare la traiettoria del punto materiale nel piano xOy, trovare in quale istante il punto materiale occupa la posizione $A(1;1)$ e determinare in tale istante le componenti della velocità e della accelerazione del punto.

Quesito 10
Dopo avere verificato l'applicabilità del teorema di Lagrange alla funzione $y=e^{-2x}+3$ nell'intervallo $[-1;2]$, determinare il punto o i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza. Interpretare geometricamente il risultato.