VALORE ASSOLUTO

EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Esercizi

DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Esercizi

Prof. Giulia Cagnetta – ITIS “Marconi” Domodossola (VB)

*EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Data una qualsiasi espressione algebrica *A(x)*, il suo valore assoluto $|A(x)|$ dipende dal segno di *A(x):*

se $A(x) \geq 0$ $\longrightarrow$ $|A(x)| = A(x)$

se $A(x) < 0$ $\longrightarrow$ $|A(x)| = -A(x)$

cosa succede se dobbiamo risolvere delle equazioni in cui una o più espressioni contenenti l'incognita compaiono in *valore assoluto?*

Per risolvere queste equazioni è necessario studiare preliminarmente il segno di ciascuna espressione in cui compare il valore assoluto:
i valori che si possono attribuire all'incognita restano divisi in intervalli, in base al valore assoluto, e l'equazione data assume "forma diversa" nei suddetti intervalli!!

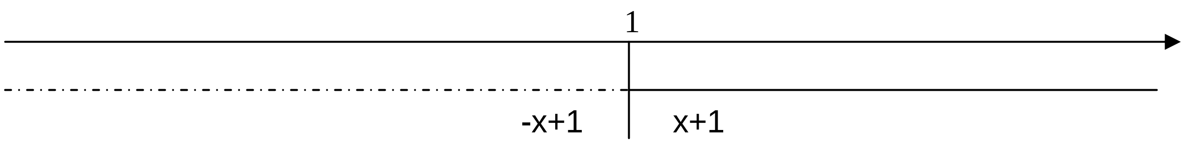
Esempio *equazione con valore assoluto*:
$|x-1| = 4-2x$

studiamo l'espressione con il v.a. $|x-1|$

quando $x-1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ il valore assoluto vale **x-1**

quando $x-1 < 0$ ossia $x < 1$ il valore assoluto vale **-x+1**

quindi il valore assoluto $|x-1|$ assume valori diversi nei due intervalli



e di conseguenza anche l'equazione assume "forme diverse" in ciascuno di questi intervalli:

quando $x \geq 1$ l'equazione diventa

x - 1 = 4 - 2x

quando $x < 1$ l'equazione diventa

- x + 1 = 4 - 2x

Perciò risolvere l'equazione con il valore assoluto

$$|x-1| = 4-2x$$

vuol dire risolvere due sistemi, contenenti le "forme diverse" dell'equazione negli intervalli determinati dal v.a.

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 = 4-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 = 4-2x \end{cases}$$

e la soluzione finale si ottiene unendo le soluzioni dei due sistemi

$$S = S_1 \cup S_2$$

risolviamo S_1

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 = 4-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+2x = 4+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

soluzione del sistema S_1 $\qquad x = \frac{5}{3}$

risolviamo S_2

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 = 4-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+2x = 4-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_2 $\qquad \nexists x \in \Re$ (impossibile; nessuna soluzione comune)

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

e se i valori assoluti nell'equazione sono due oppure più di due?
Niente paura.. il ragionamento da seguire non cambia!! Si studiano i singoli v.a., si ricavano le "forme diverse" di equazioni e si ricavano i sistemi da risolvere!! Occhio, però, i sistemi da risolvere aumentano! L'unione di tutte le soluzioni dei sistemi determinerà la soluzione finale!

Esempio *equazione con due valori assoluti:*

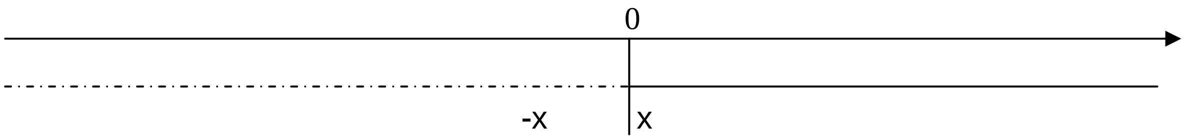
$|x| - 2|x+3| = 0$

studiamo il primo v.a. $|x|$

quando $x \geq 0$ il valore assoluto vale **x**

quando $x < 0$ il valore assoluto vale **-x**

quindi il valore assoluto $|x|$ assume valori diversi nei due intervalli

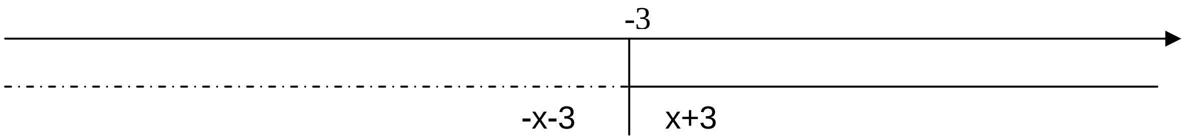


studiamo il secondo v.a. $|x+3|$

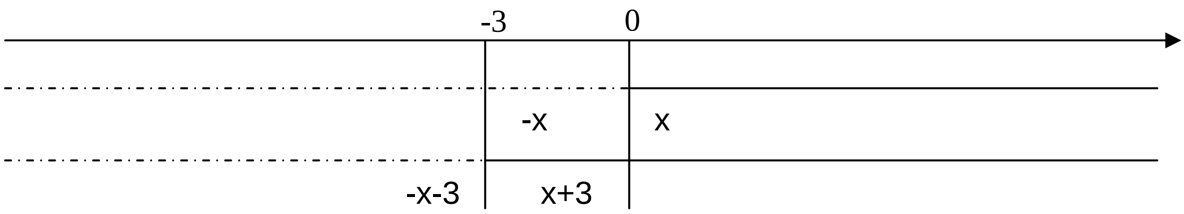
quando $x+3 \geq 0$ ossia $x \geq -3$ il valore assoluto vale **x+3**

quando $x+3 < 0$ ossia $x < -3$ il valore assoluto vale **-x-3**

quindi il valore assoluto $|x+3|$ assume valori diversi nei due intervalli



se consideriamo insieme i due valori assoluti e i loro intervalli si ricava



si può notare come l'equazione assume TRE "forme diverse" in tre intervalli

quando $x < -3$ l'equazione assume la forma **–x-2(-x-3)=0**

quando $-3 \leq x < 0$ l'equazione assume la forma **–x-2(x+3)=0**

quando $x \geq 0$ l'equazione assume la forma **x-2(x+3)=0**

perciò dobbiamo studiare tre sistemi

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x - 2(-x-3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2(x+3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2(x+3) = 0 \end{cases}$$

e la soluzione finale si ricaverà unendo le soluzioni dei tre sistemi

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

risolviamo il primo sistema

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x - 2(-x-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x + 2x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x + 2x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x = -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_1 $x = -6$

risolviamo il secondo sistema

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2(x+3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -3x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x = -\frac{6}{3} = -2 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_2 $\quad x = -2$

risolviamo il terzo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2(x+3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_3 $\quad \nexists x \in \Re$ (impossibile; nessuna soluzione comune)

la soluzione finale: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow x = -6 \cup x = -2$

esercizi

*DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Data una qualsiasi espressione algebrica *A(x)*, il suo valore assoluto $|A(x)|$ dipende dal segno di *A(x):*

se $A(x) \geq 0$ $\longrightarrow$ $|A(x)| = A(x)$

se $A(x) < 0$ $\longrightarrow$ $|A(x)| = -A(x)$

cosa succede se dobbiamo risolvere delle disequazioni in cui una o più espressioni contenenti l'incognita compaiono in *valore assoluto?*

Per risolvere queste disequazioni è necessario studiare preliminarmente il segno di ciascuna espressione in cui compare il valore assoluto:
i valori che si possono attribuire all'incognita restano divisi in intervalli, in base al valore assoluto, e la disequazione data assume "forma diversa" nei suddetti intervalli!!

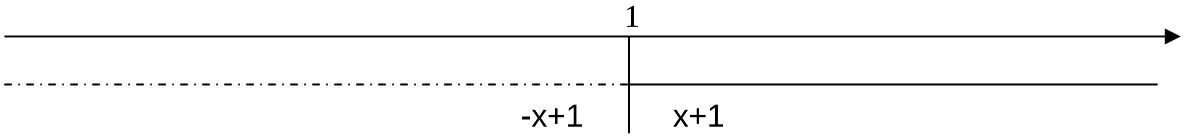
Esempio *disequazione con valore assoluto*:
$|x-1| > 4-2x$

studiamo l'espressione con il v.a. $|x-1|$

quando $x-1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ il valore assoluto vale **x-1**

quando $x-1 < 0$ ossia $x < 1$ il valore assoluto vale **-x+1**

quindi il valore assoluto $|x-1|$ assume valori diversi nei due intervalli



e di conseguenza anche la disequazione assume "forme diverse" in ciascuno di questi intervalli:

quando $x \geq 1$ la disequazione diventa

x - 1 > 4 - 2x

quando $x < 1$ la disequazione diventa

- x + 1 > 4 - 2x

Perciò risolvere la disequazione con il valore assoluto

$$|x-1| > 4-2x$$

vuol dire risolvere due sistemi, contenenti le "forme diverse" della disequazione negli intervalli determinati dal v.a.

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 > 4-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 > 4-2x \end{cases}$$

e la soluzione finale si ottiene unendo le soluzioni dei due sistemi

$$S = S_1 \cup S_2$$

risolviamo S_1

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 > 4-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+2x > 4+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

soluzione del sistema S_1 $\quad x > \dfrac{5}{3}$

risolviamo S_2

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 > 4-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+2x > 4-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_2 $\quad \nexists x \in \Re$ (impossibile; nessuna soluzione comune)

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x > \dfrac{5}{3}$

e se i valori assoluti nella disequazione sono due? E se sono più di due?
Niente paura.. il ragionamento da seguire non cambia!! Si studiano i singoli v.a., si ricavano le "forme diverse" di disequazioni e si ricavano i sistemi da risolvere!! Occhio, però, i sistemi da risolvere aumentano! L'unione di tutte le soluzioni dei sistemi determinerà la soluzione finale!

Esempio *disequazione con due valori assoluti:*

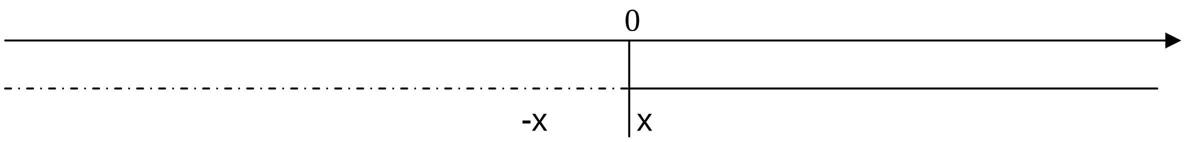
$|x| - 2|x+3| < 0$

studiamo il primo v.a. $|x|$

quando $x \geq 0$ il valore assoluto vale **x**

quando $x < 0$ il valore assoluto vale **-x**

quindi il valore assoluto $|x|$ assume valori diversi nei due intervalli

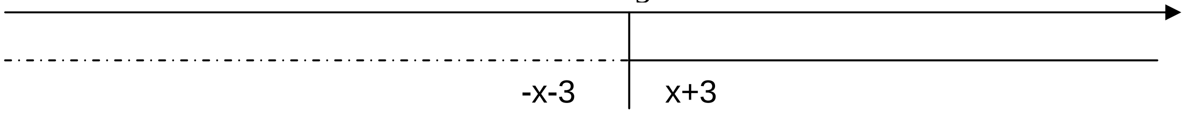


studiamo il secondo v.a. $|x+3|$

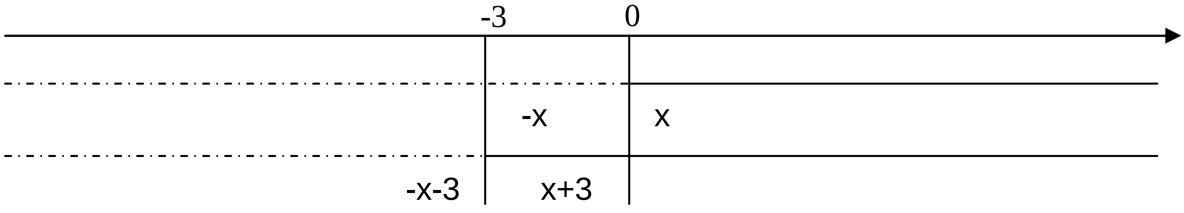
quando $x+3 \geq 0$ ossia $x \geq -3$ il valore assoluto vale **x+3**

quando $x+3 < 0$ ossia $x < -3$ il valore assoluto vale **-x-3**

quindi il valore assoluto $|x+3|$ assume valori diversi nei due intervalli



se consideriamo insieme i due valori assoluti e i loro intervalli si ricava



si può notare come la disequazione assume TRE “forme diverse” in tre intervalli

quando $x < -3$ la disequazione assume la forma **–x-2(-x-3)<0**

quando $-3 \leq x < 0$ la disequazione assume la forma **–x-2(x+3)<0**

quando $x \geq 0$ la disequazione assume la forma **x-2(x+3)<0**

perciò dobbiamo studiare tre sistemi

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x - 2(-x-3) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2(x+3) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2(x+3) < 0 \end{cases}$$

e la soluzione finale si ricaverà unendo le soluzioni dei tre sistemi

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

risolviamo il primo sistema

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x - 2(-x-3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x + 2x + 6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x + 2x < -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x < -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_1 $x < -6$

risolviamo il secondo sistema

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2(x+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x - 2x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -3x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x > -\frac{6}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_2 $\quad -2 < x < 0$

risolviamo il terzo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2(x+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema S_3 $\quad x \geq 0$

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow x < -6 \cup -2 < x < 0 \cup x \geq 0 \Rightarrow x < -6 \cup x > -2$

*ESERCIZI: disequazioni con v.a.

Risolviamo insieme una disequazione con il valore assoluto!
Non ricordi la teoria?!? No problem.. un ripasso sicuramente non fa male! [teoria]

Disequazione:
$|x^2-5x+6| \leq |x-3|$

analizziamo il primo valore assoluto $|x^2-5x+6|$

$$|x^2-5x+6| \begin{cases} \text{se } x^2-5x+6 \geq 0 \longrightarrow x^2-5x+6 \\ \text{se } x^2-5x+6 < 0 \longrightarrow -(x^2-5x+6) \longrightarrow -x^2+5x-6 \end{cases}$$

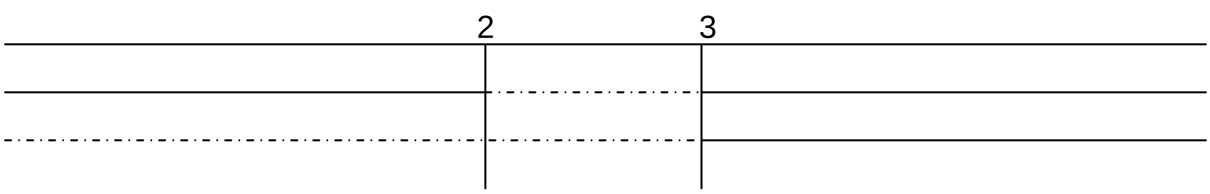
ossia

$$|x^2-5x+6| \begin{cases} \text{se } x \leq 2 \text{ e } x \geq 3 \longrightarrow x^2-5x+6 \\ \text{se } 2 < x < 3 \longrightarrow -x^2+5x-6 \end{cases}$$

analizziamo il secondo valore assoluto $|x-3|$
prova a determinare il suo valore in modo autonomo.. e poi confronta il risultato ottenuto con quello riportato

$$|x-3| \begin{cases} \text{se } x \geq 3 \longrightarrow x-3 \\ \text{se } x < 3 \longrightarrow -x+3 \end{cases}$$

adesso bisogna creare il grafico per individuare gli intervalli



Quanti sistemi si formano per la risoluzione della nostra disequazione?

Hai detto TRE??
BRAVO!!!

IMPOSTA I TRE SISTEMI.. E POI VERIFICA SE SONO CORRETTI!

$$S_1 \qquad \begin{cases} x \le 2 \\ x^2 - 5x + 6 \le -x + 3 \end{cases}$$

$$S_2 \qquad \begin{cases} 2 < x < 3 \\ -x^2 + 5x - 6 \le -x + 3 \end{cases}$$

$$S_3 \qquad \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 5x + 6 \le x - 3 \end{cases}$$

adesso bisogna risolvere i sistemi!!

Soluzioni:

$S_1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$

$S_2 \Rightarrow 2 < x < 3$

$S_3 \Rightarrow 3 \le x \le 4$

se uniamo le soluzioni ottenute determiniamo la soluzione della disequazione:

$$S = 1 \le x \le 4$$

hai ottenuto lo stesso risultato??
Bravo..
Non hai ottenuto lo stesso risultato?? Controlla bene i calcoli.. e non perderti d'animo!
Sei ugualmente bravo!!

Adesso tocca a te..
risolvere le seguenti disequazioni con v.a.

a) $|x - 4| > -2x + 1$
b) $x^2 - 1 > |x^2 - 5x + 1| - 2$
c) $|x^2 - 2x| \le 2|x| - 3$