Somma della serie geometrica

Vogliamo calcolare la somma della seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

con $q \in \Re$.

Iniziamo con il calcolare la seguente somma:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

A tal fine notiamo che vale la seguente relazione:

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n) = 1-q^{n+1}$$

per dimostrare ciò basta svolgere la moltiplicazione tra polinomi a primo membro. Possiamo ora riscrivere tale relazione nel seguente modo più compatto:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$

e, se $q \neq 1$, posiamo dividere entrambi i membri per $(1-q)$ ottenendo finalmente la relazione cercata:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Ad esempio se $q = \frac{1}{2}$ e $n = 5$ abbiamo che:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}.$$

Ammettiamo che il numero q sia un numero soddisfacente la condizione: $|q| < 1$ allora se n diventa sempre più grande la quantità q^{n+1} diventa sempre più piccola e possiamo pensare che risuti trascurabile se n è sufficientemente grande. Quindi possiamo pensare che la somma delle quantità q^n risulta pari a:

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Un'applicazione: calcolo dell'incertezza nel rapporto di due misure

Sono assegnate le due misure: $\alpha = \bar{a} \pm \Delta a$ e $\beta = \bar{b} \pm \Delta b$. Vogliamo determinare l'approssimazione del numero ottenuto calcolando il rapporto: $\frac{\alpha}{\beta}$.

Iniziamo con effetuare la sostituzione e alcuni semplici raccoglimenti:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{a} \pm \Delta a}{\overline{b} \pm \Delta b} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \left(\frac{1 \pm \dfrac{\Delta a}{\overline{a}}}{1 \pm \dfrac{\Delta b}{\overline{b}}} \right).$$

Tale quantità può essere anche riscritta nel seguente modo:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} \left(1 \pm \frac{\Delta a}{\overline{a}}\right) \frac{1}{1 \pm \dfrac{\Delta b}{\overline{b}}}.$$

Iniziamo con il notare che la quantità: $\dfrac{\Delta b}{\overline{b}} \ll 1$, dato che ammettiamo che la misurazione sia stata effettuata bene e quindi l'incertezza sia molto più piccola della misura media ottenuta. Quindi possiamo applicare alla quantità:

$$\frac{1}{1 \pm \dfrac{\Delta b}{\overline{b}}}$$

lo sviluppo in serie géometrica, ottenendo:

$$\frac{1}{1 \pm \dfrac{\Delta b}{\overline{b}}} = 1 \pm \frac{\Delta b}{\overline{b}} \pm \left(\frac{\Delta b}{\overline{b}}\right)^2 + \cdots \approx 1 \pm \frac{\Delta b}{\overline{b}}$$

quindi effettuando la sostituzione nell'espressione precedente otteniamo:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} \left(1 \pm \frac{\Delta a}{\overline{a}}\right) \left(1 \pm \frac{\Delta b}{\overline{b}}\right)$$

che può essere scrittto, utilizzando le regole spiegate per il prodotto di due misure approssimate, nel seguente modo:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} \left[1 \pm \left(\frac{\Delta a}{\overline{a}} + \frac{\Delta b}{\overline{b}}\right)\right].$$

Effetuando dei semplici calcoli otteniamo, finalmente, l'espressioen cercata:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \pm \frac{\overline{a}\Delta b + \overline{b}\Delta a}{\overline{b}^2}.$$

Tabella riassuntiva per la determinazione delle incertezze

Operazione	Misura
$\alpha \pm \beta$	$(\overline{a} \pm \overline{b}) \pm (\Delta a + \Delta b)$
$\alpha \cdot \beta$	$\overline{a} \cdot \overline{b} \pm (\overline{a}\Delta b + \overline{b}\Delta a)$
α^n	$\overline{a}^n \pm n\alpha^{n-1}\Delta a$
$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} \pm \dfrac{\overline{a}\Delta b + \overline{b}\Delta a}{\overline{b}^2}$