MISURA DI G CON LA BILANCIA DI CAVENDISH

1.INTRODUZIONE

Lo scopo di questo esperimento è ricavare il valore della costante di Gravitazione Universale *G* utilizzando la bilancia di torsione di Cavendish, primo fisico che nel 1798 è riuscita a determinarla.
Inizialmente la costante sarà calcolata considerando solo l'attrazione gravitazionale tra ciascuna sfera piccola e la sfera grande ad essa più vicina, perciò si trascurerà l'attrazione tra le sfere piccole e tra quest'ultime con le sfere grandi rispettivamente più lontane.
In seguito il valore di *G* sarà corretto considerando anche l'effetto di queste attrazioni.

2.MISURE E RISULTATI

Prima fase: con le sfere grandi lontane dal manubrio, si verifica l'allineamento dell'apparato, ovvero dell'ortogonalità tra scatola che contiene il pendolo e il filo che lo sorregge.

Si nota che i due laser proiettati rispettivamente dalla riflessione sullo specchio e della riflessione sulle finestra di plexiglas non sono allineati in modo preciso. Questo succede per atti pratici ma non è rilevante per il fine dell'esperimento.

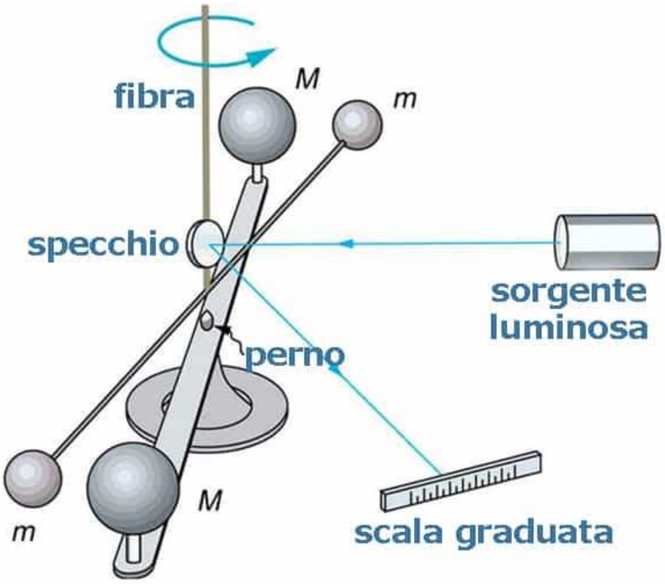
Dalla misurazione del tempo, che il laser riflesso dallo specchio impiega per compiere le oscillazioni libere, si calcola il periodo di oscillazione del pendolo T, e la costante elastica di torsione del filo K.
Entrambe le misure sono accompagnate dagli errori. Per l'errore su T si calcola la deviazione standard sulla media mentre per l'errore su *k* si utilizza la formula della propagazione degli errori tramite derivate parziali:

$$T = \left(\frac{\Sigma_{t1}^{t8} t}{8}\right) \times 2 = (488{,}71 \pm 26{,}12)\mathrm{s}$$

Ci si può calcolare il momento d'inerzia del manubrio attraverso la formula sottostante e la rispettiva incertezza:

$$I = 2m(d^2+\frac{2}{5\,r^2})= (1{,}9428 \pm 0{,}1014)\times 10^{-4}kgm^2$$

Si procede con la rotazione del sostegno su cui sono state appoggiate le sfere grandi in modo tale da avvicinarle alle pareti della camera. Il manubrio, in questa situazione, inizia ad oscillare compiendo delle oscillazioni smorzate; ciò accade perché esso è soggetto a una coppia di forze delle sfere grandi che viene controbilanciata dalla forza elastica di torsione.



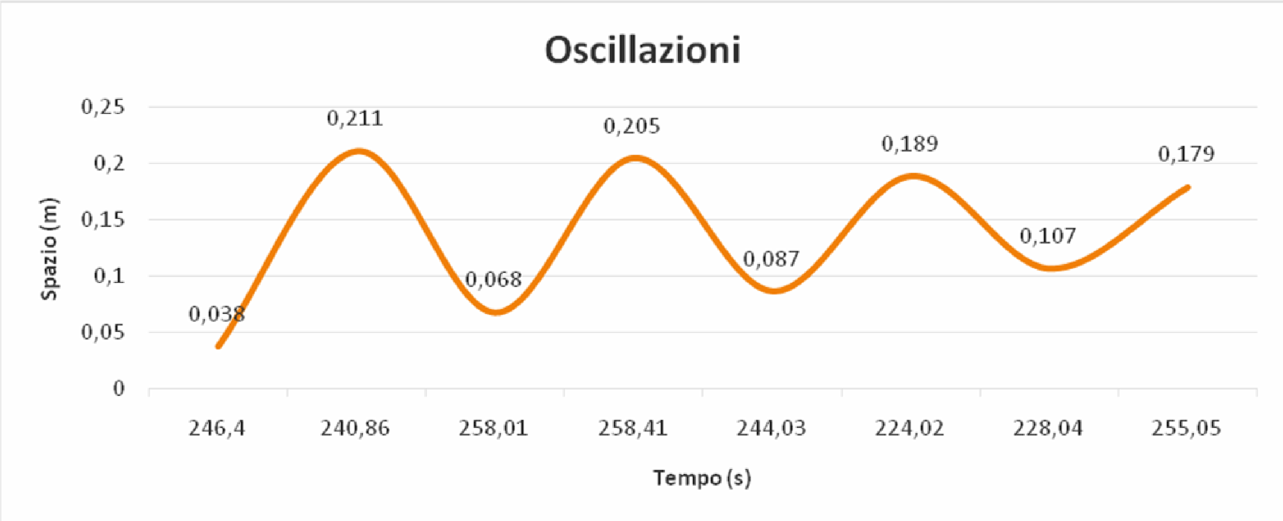
Si calcola il punto medio ricorsivamente con le sottostanti misure effettuate sperimentalmente:

Oscillazioni	Spazio X	t = T/2
1°	0,038	246,42 s
2°	0,211	240,86 s
3°	0,068	258,01 s
4°	0,205	258,41 s
5°	0,087	244.03 s
6°	0,189	244,02 s
7°	0,107	228,04 s
8°	0,179	255,05 s

$$X_m = \frac{\frac{X_1 + X_3}{2} + X_2}{2} =$$

$$= (0{,}1320 \pm 0{,}0006)\ m$$

Scelto O (0;0) arbitrariamente come punto di riferimento del sistema, si costruisce il grafico delle oscillazioni smorzate del punto luminoso riflesso dallo specchio.



(punto medio, retta sul grafico)

Seconda fase: si ruota il supporto delle sfere grandi di 180° si ripetono le misurazioni precedenti con i rispettivi errori, il grafico delle oscillazioni e il punto medio.

$$T = \left(\frac{\Sigma_{t1}^{t8}\, t}{8}\right) \times 2 = (499{,}31 \pm 16{,}08)\ \mathrm{s}$$

$$K = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = (3{,}2113\times10^{-8} \pm 0{,}2550 \times10^{-8})\ \mathrm{J/s^2}$$

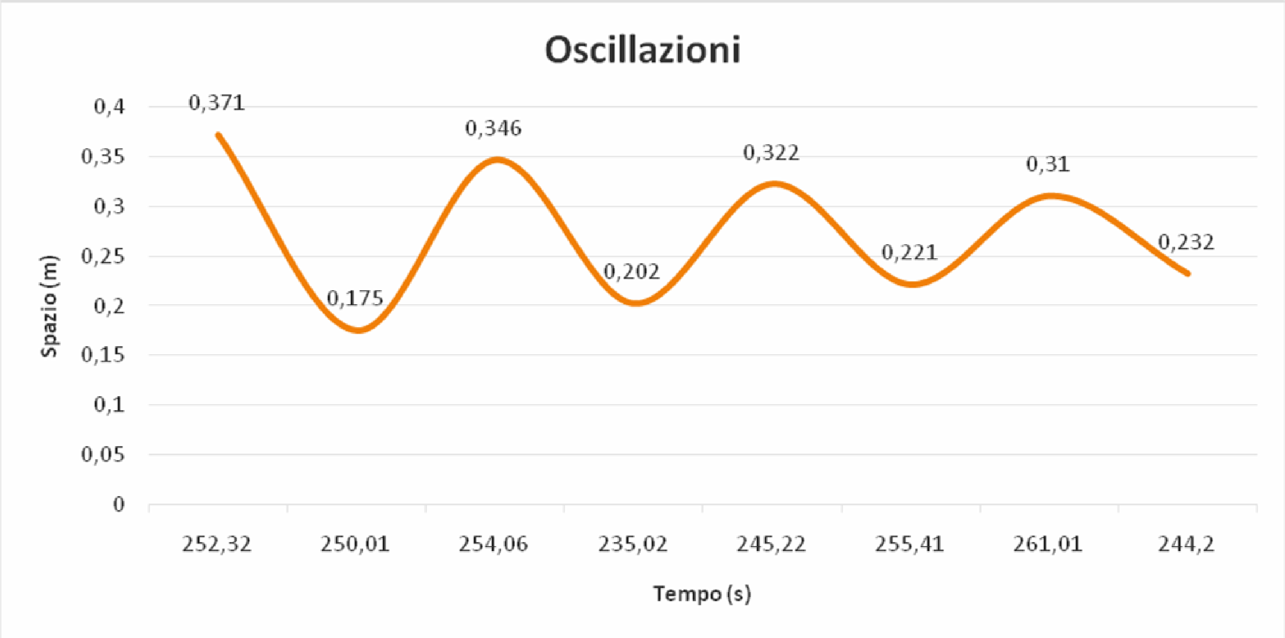
$$I = 2m(d^2 + \frac{2}{5} r^2) = (1{,}9428 \times10^{-4} \pm 0{,}1014 \times10^{-4})\mathrm{kgm^2}$$

Calcolando il punto medio ricorsivamente:

$$X_m = \frac{\frac{X_1 + X_3}{2} + X_2}{2} = $$

$$= (0{,}2660 \pm 0{,}0006)\ \mathrm{m}$$

Oscillazioni	t = T/2	Spazio X
1°	252,32 s	0,371 m
2°	250,01 s	0,175 m
3°	254,06 s	0,346 m
4°	235,02 s	0,202 m
5°	245,22 s	0,322 m
6°	255,41 s	0,221 m
7°	261,01 s	0,310 m
8°	244,20 s	0,232 m



Misurata la distanza **L** tra lo schermo e lo specchio all'interno dell'apparecchio, si determina il **ΔS**, ovvero la differenza di posizione del raggio luminoso calcolata nelle due fasi:

$L=(5{,}500 \pm 0{,}001)$ m

$\Delta S= (S_2-S_1)/2= 6{,}4$ cm $=(0{,}0640\pm 0{,}0007)$ m

Tramite questi due valori si può misurare l'angolo **θ**di rotazione del manubrio:

$2\theta = tg\,(2\theta) = \Delta S/\,2L = (0{,}01164 \pm 0{,}00006)$ rad

Quindi:

$\theta= 2\theta/2 = (5{,}820\pm 0{,}032) \times 10^{-3}rad= 1{,}045°$

In termini pratici accade che le due masse grandi attirano gravitazionalmente le due masse più piccole dell'asta; per il modo in cui sono disposte, le due masse generano due momenti torcenti $\tau_{gravitazionale}$ e $\tau_{torsione}$ uguali e contrari, che tendono a far ruotare la bilancia torcendo il filo. Quest'ultimo genera un momento proporzionale all'angolo di torsione contrapposto a quello della forza gravitazionale.
In questa configurazione di equilibrio i due momenti sono uguali, l'asta è ferma ma il filo resta leggermente ritorto.

$$\tau_{gravitazionale} = 2\left(\frac{GmM}{b^2}\right) d$$

Perciò è stato calcolato il valore del momento di torsione τ, dato dalla seguente equazione:

$$\tau_{torsione} = -k \times \theta = 3{,}2113 \times 10^{-8} \times 5{,}82 \times 10^{-3} =$$

$$= -(1{,}8689 \pm 0{,}1340) \times 10^{-10} \mathrm{J} \times \mathrm{rad} / s^2$$

Ponendo uguali e contrari i due momenti torcenti ($\tau_{gravitazionale} + \tau_{torsione} = 0$) e

avendo a disposizione tutti i dati è possibile ricavare il valore di *G* dalla formula:

$$G = \frac{k\theta b^2}{2mMd} = 7{,}03 \text{ x } 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

Per calcolare l'errore su *G* si è utilizzata la formula generale della propagazione degli errori, facendo le derivate parziali per le variabili $\tau = -k^{\theta}$; m; M in quanto sono le uniche che presentavano l'incertezza:

$$\sigma_G = 0{,}911 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$$

Compatibilità tra il valore di *G* trovato e *G* atteso (6,67 x $10^{-11} Nm^2/kg^2$)

$$G = (|G - Gatteso|)/(= 0{,}39$$

Probabilità (fuori 0,39σ)=1-0,3035=69,65% >5% : dunque sono misure compatibili.

Terza fase:si considera l'effetto di attrazione tra le due sfere piccole e quello della sfera più lontana.

Dal punto di vista geometrico si ricava la distanza tra la sfera più piccola e la sfera grande più lontana:

$$b_1 = \sqrt{b^2 + 4d^2} = 0{,}1102 \text{ m}$$

Considerando questi ulteriori effetti di attrazione gravitazionale si modifica il momento torcente perché la forza non è più perpendicolare al braccio e bisogna considerare l'angolo formato dal braccio che unisce la sfera piccola a quella grande più lontana.

Per trovare l'angolo beta : $\text{arctg}\,\frac{b}{2d} = 24{,}9°$

$$\tau_{gravitazionale}=2\left(\frac{Gm1\ Md}{b^2}+\frac{Gm2\ Mdsinb}{b'^2}\right)=k\theta=\tau_{torsione}$$

Da questo si ricava l'equazione per *G*:

$$G=\frac{k\theta}{\frac{Gm1\ Md}{b^2}+\frac{Gm2\ Mdsinb}{b'^2}}=6{,}54 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

Tramite la formula generale di propagazione degli errori derivando parzialmente per le variabili $\tau=-k\theta$; $m_1=m_2=m$; M si trova l'errore su *G*:

$$\sigma_G= 1{,}56 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$$

Compatibilità tra il valore di *G* trovato e *G* atteso ($6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$)

$$G=(|G - Gatteso|)/(=0{,}08$$

Probabilità (fuori 0,08σ)=1-0,0638=93,62% >5% : dunque sono misure compatibili.

3. CONCLUSIONE

Grazie alla bilancia di Cavendish è possibile trovare il valore di *G* inizialmente considerando l'attrazione gravitazionale di una sola sfera grande e, successivamente, considerando le attrazioni tra le sfere piccole e quella grande più lontana. Nella prima misura il valore trovato è compatibile con quello atteso, tuttavia la seconda misura è più precisa e permette di trovare un valore che presenta una compatibilità molto alta con *G* atteso.