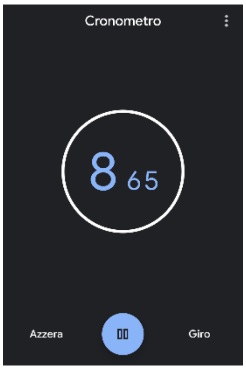
Proporzionalità quadratica tra grandezze fisiche

Peruzzotti Mattia, 1ª A
4 dicembre 2020
Laboratorio di fisica n°1 del Liceo Viale dei Tigli “Leonardo da Vinci” di Gallarate [da remoto, in collegamento audio e video]

Scopo: **Verifica sperimentale della proporzionalità quadratica e diretta tra la lunghezza e il periodo di oscillazione di un pendolo**

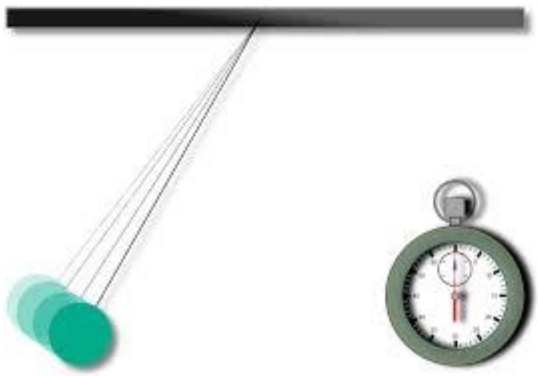
Materiale Utilizzato:

- Asta millimetrata con due bandierine (portata = 1m; sensibilità = 1mm)
- Pendolo, formato da:
  - Treppiede (composto da una pedana e da un’asta verticale)
  - Morsa appesa ad un’asta orizzontale
  - Massa -> Pallina
- Cronometro -> telefono



Premessa Teorica

Nel nostro esperimento utilizzeremo alcuni strumenti dei quali è importante conoscerne alcune caratteristiche. Ogni strumento di misura possiede due caratteristiche principali: la sensibilità (la misura più piccola che lo strumento può misurare) e la portata (la misura più grande che lo strumento può misurare). A causa della sensibilità e della portata, le misurazioni possono avere degli **errori**: essi possono essere sistematici (dipendono dallo strumento o dallo sperimentatore che compie l’esperimento) oppure casuali (cioè inevitabili). Ogni misurazione che si compie è, quindi, imprecisa a causa della sensibilità dello strumento e delle cifre infinite di ogni valore.
Per la misurazione del periodo di oscillazione del pendolo abbiamo utilizzato i cronometri dei nostri cellulari come strumento di misura, essi hanno una sensibilità di 1/10 di secondo.



Nella nostra esperienza, però, incontreremo anche altri errori:

L’**errore di parallasse** è l'errore dovuto alla posizione che si assume rispetto allo strumento con cui effettuiamo la misura; essa può variare in base ai punti di vista e la direzione da dove guardi.
Per effettuare una misura migliore è opportuno osservare frontalmente l’oggetto.

L’**errore di reattività**, dovuto alla prontezza dei riflessi nel far partire e fermare il cronometro durante le oscillazioni del pendolo.

È impossibile ottenere una misura esatta, quindi, ad ogni misurazione, è associata un’incertezza (o errore). L’incertezza di una misura si esprime con una grandezza (x), un valore medio ($\bar{x}$) ed un’incertezza (Δx) o errore

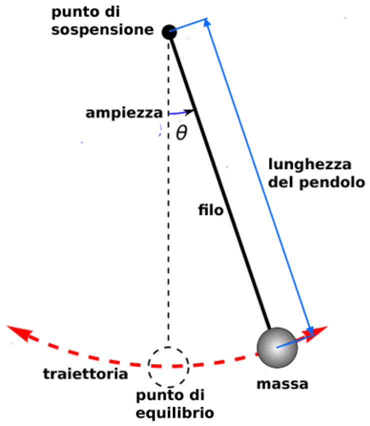
assoluto (εa). Quando si misura una grandezza (x) una volta sola, il valore $\bar{x}$ corrisponde alla risposta fornita dallo strumento, mentre l'errore assoluto è uguale alla sensibilità dello strumento utilizzato.
Nel caso, lo sperimentatore, invece, abbia misurato più volte una grandezza, il valore medio corrisponde alla media delle misure ottenute mentre l'errore assoluto (εa) o l'incertezza (Δx) di più misure si calcola tramite la semidispersione massima (la metà dell'ampiezza del range) tra tutte le misure, cioè, la metà della differenza tra il valore più alto ottenuto e il valore più basso ottenuto $\varepsilon a = e = (\frac{Xmax - Xmin}{2})$.
Errore assoluto = $\varepsilon a = e = (\frac{Xmax - Xmin}{2})$
La grandezza fisica misurata, quindi, può essere un numero qualunque che è compreso tra il valore medio e l'errore assoluto, esso si indica quindi con il segno **±** (più o meno) ed il risultato è: $x = \bar{x} \pm \varepsilon a$. Per verificare la precisione di una misurazione si fa ricorso all'utilizzo dell'errore relativo εr; esso si calcola tramite il rapporto tra l'errore assoluto (o incertezza x) e la grandezza misurata, cioè: $\varepsilon r = \frac{\varepsilon a}{x}$.
Errore Relativo = $\varepsilon r = \frac{\varepsilon a}{x}$.
Dall'errore relativo si può ricavare l'errore (o incertezza) percentuale: %= (εr × 100) %. Da questo capiamo che è più precisa una misura con l'errore relativo minore.
Errore Percentuale =%= (εr × 100) %**.**

L'esperimento da noi effettuato ci porterà a verificare la **proporzionalità diretta e quadratica tra grandezze fisiche**. Date due misure x e y possiamo dire che sono direttamente proporzionali se il loro rapporto $\frac{y}{x}$ è costante; tale rapporto, rappresentato tramite la lettera k, viene identificato come costante di proporzionalità.
Se, invece, tra due variabili x e y si ha una relazione di proporzionalità quadratica la formula da esprimere è: $\frac{y}{x^2} = k$, quindi $y = k\,x^2$, y è direttamente proporzionale al quadrato di x.
La **rappresentazione grafica** di una proporzionalità viene effettuata tramite un grafico cartesiano (invenzione attribuita al filosofo e matematico francese Cartesio da cui il nome). Il riferimento cartesiano è costituito da due rette ortogonali (chiamate assi) tra loro perpendicolari che si intersecano in un punto chiamato origine. La retta orizzontale è detta asse delle ascisse, la retta verticale è detta asse delle ordinate. Un sistema di riferimento cartesiano in due dimensioni (ascisse e ordinate) viene chiamato **piano cartesiano**. Lo spazio viene suddiviso in quattro quadranti di cui il primo caratterizzato da punti di ascissa e ordinata positivi.
Il piano cartesiano è quindi un sistema di riferimento (permette di identificare dei punti in un piano) basato su coordinate cartesiane, tramite le quali ogni punto viene individuato mediante una coppia di numeri.
Utilizzando le coordinate possiamo trovare nel piano tutti i punti presi in considerazione durante la nostra esperienza.
Durante l'esperimento, lavoreremo con grandezze fisiche con errore di sensibilità, ne consegue che non potendo conoscere con precisione le misurazioni effettuate, è importante rappresentare le coordinate nel grafico in maniera corretta. L'errore assoluto di una misura stabilisce il range statistico nel quale la misura è compresa, per difetto o eccesso; se il valore preso in considerazione ha come errore assoluto $(x \pm 1)$ i punti da prendere in considerazioni sono quelli compresi tra $x - 1$ (difetto) e $x + 1$ (eccesso), quindi $(x - 1 \div x + 1)$. Tale criterio viene applicato sia alle ascisse che alle ordinate; e conseguentemente, congiungendo le due coordinate nel piano, si svilupperanno dei piccoli rettangoli (chiamati rettangoli di errore) e non più dei singoli punti, questo perché la misurazione effettuata è affetta da errore e quindi impossibile stabilirne il valore con precisione.

La proporzionalità diretta viene rappresentata sul grafico cartesiano tramite una semiretta uscente dall'origine [vedi relazione precedente, "RELAZIONE DI LABORATORIO SU VERIFICA SPERIMENTALE DELLA PROPORZIONALITÀ DIRETTA TRA GRANDEZZE FISICHE"]; mentre, la proporzionalità quadratica viene rappresentata con una curva di **parabola** nascente dall'origine; per verificare se la linea tracciata sia una parabola (e quindi dimostrare la proporzionalità quadratica), si consiglia l'utilizzo di un curvilineo.

Possiamo quindi affermare che se esiste una semiretta, nascente dall'origine, che attraversa tutti i punti (nel nostro caso i rettangoli) stabiliti grazie alle coordinate cartesiane abbiamo verificato la **proporzionalità diretta** di due grandezze fisiche e, che se esiste una parabola nascente dall'origine che attraversa tutti i rettangoli di errore abbiamo dimostrato la **proporzionalità quadratica** tra due misure.

L'esperimento da noi effettuato ha come scopo la verifica della proporzionalità diretta e quadratica, questo sarà effettuato tramite il pendolo, esso è un sistema fisico costituito da una massa sospesa tramite un filo inestensibile. La massa è soggetta all'attrazione gravitazionale e risulta fissata ad un'asta di ferro su un treppiede (supporto metallico che poggia su tre aste di ferro).



Le leggi della durata del periodo di oscillazione del pendolo, formulate da Galileo Galilei, testimoniano che le oscillazioni sono complanari e che il periodo delle *piccole oscillazioni* è costante (si parla dell'isocronismo: la durata del periodo, al variare dell'ampiezza delle oscillazioni rimane sempre la stessa). Si può inoltre verificare che il moto del pendolo è armonico.
Il **periodo di oscillazione** del pendolo è l'intervallo di tempo (T) impiegato dalla massa (m) a compiere un'oscillazione intera (andata e ritorno). La durata di oscillazione cambia al variare della lunghezza (l) del pendolo e dell'accelerazione di gravità terrestre (g) a cui è sottoposto lo strumento. La formula che testimonia questa caratteristica è: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, con $g = 9{,}8\ m/s^2$. Data questa formula possiamo ricavare la formula inversa per il calcolo di $l = (g/4\pi^2)T^2$. In questa formula g e π sono costanti che, quindi, possono essere rappresentate come K (costante di proporzionalità). Quindi, la medesima formula può essere espressa come $l = K\,T^2$; questo è l'obbiettivo della nostra esperienza, verificare che la lunghezza del pendolo è direttamente proporzionale al quadrato del suo periodo di oscillazione ($l \propto T^2$) e, pertanto, dobbiamo dimostrare che l e T sono legati da proporzionalità quadratica.

Un'oscillazione del pendolo, come detto precedentemente, è composta da andata e ritorno; nel nostro esperimento, per facilitarci le misurazioni, verrà determinato il tempo impiegato dalla massa per compiere dieci oscillazioni anziché una, per poi calcolare il rapporto per ottenere la misurazione su una sola oscillazione. Per far ciò, però, dobbiamo comprendere ed eseguire le operazioni tra grandezze fisiche affette da errore (l'insieme di queste operazioni prendono il nome di Algoritmo) e quindi saper definire la propagazione degli errori.

Quando dobbiamo lavorare su misure affette da errori è importante conoscere come valutare le conseguenze delle operazioni di somma, differenza, prodotto e rapporto in quanto gli errori si combinano.
Sommando una grandezza con errore con un'altra grandezza con un altro errore si sommano sia gli errori che i valori.
Sottraendo una grandezza con errore con una grandezza con errore i valori si sottraggono, mentre gli errori si sommano.
Moltiplicando una grandezza con errore con un numero senza errore sia il valore che l'errore vanno moltiplicati per quel numero.
Nel caso invece di prodotto o rapporto tra due grandezze con errore, i valori vengono moltiplicati (o divisi), mentre bisogna sommare gli errori relativi delle misure

$[\varepsilon r(a \cdot b) = \varepsilon r(a) \cdot \varepsilon r(b)]$

Le operazioni da fare in questo caso (ovvero l'**algoritmo**) sono:

- trovare il prodotto o rapporto tra i valori ($a \cdot b$);
- calcolare gli εr (errori relativi) delle misure [$\varepsilon r(a)$] e [$\varepsilon r(b)$];
- sommare gli εr calcolati [$\varepsilon r(a)$+ $\varepsilon r(b)$]
- trasformare la somma degli εr in εa (errori assoluti) in modo tale da poterli paragonare con il prodotto o il rapporto trovato inizialmente; quest'ultima operazione [$\varepsilon a(a \cdot b)$] si calcola tramite il prodotto tra il risultato della prima operazione tra i valori (che può essere prodotto o rapporto) e la somma degli errori relativi.

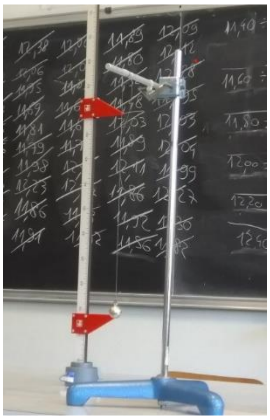
Da queste semplici operazioni possiamo dedurre che **gli errori si propagano** quando si compiono operazioni tra grandezze con incertezze.

Quando si lavora con molti valori è opportuno nominare la **media** matematica, ovvero il rapporto tra la somma dei valori numerici diviso per il numero di valori numerici considerati, in fisica, la media, corrisponde al valore medio $\bar{x}$.

Il nostro esperimento ci porterà a verifica la proporzionalità quadratica tra grandezze fisiche, infatti, confronteremo le misure del periodo di oscillazione e della sua lunghezza ogni volta che l'esperimento si ripeterà: ad ogni misurazione il pendolo si accorcia, provocando così, misurazioni differenti.

<u>Esecuzione dell'esperienza</u>

Il giorno 4 dicembre 2020, in collegamento dalle proprie abitazioni con la prof.ssa Antonella Demarchi (responsabile del laboratorio n°1 di fisica del liceo), abbiamo eseguito la nostra quarta esperienza in laboratorio con l'aiuto del prof.re Franco Maria Boschetto, con l'obbiettivo di verificare la proporzionalità diretta e quadratica.
Dopo un'introduzione generale dell'argomento, la professoressa De Marchi ci ha presentato il materiale che avremmo utilizzato durante l'esperimento. Per poi iniziare con l'esperimento vero e proprio.



1. Per prima cosa abbiamo posizionato il pendolo sul banco di lavoro e, grazie all'asta millimetrata abbiamo misurato l'altezza dello strumento, compresa tra il baricentro della massa (una pallina) e la mezzadria dell'asta, per fare ciò abbiamo misurato la distanza tra il banco di lavoro e la pallina: h_0= (9,8 ± 0,1) cm e la distanza tra il banco di lavoro e la mezzadria dell'asta: h = (47,4 ± 0,1) cm.

2. Dopo aver effettuato la misurazione dell'altezza, abbiamo misurato il periodo di oscillazione del pendolo con i cronometri dei nostri telefoni per poi organizzarli in tabelle escludendo i valori sopra o sotto la media, ovvero fuori scala. Abbiamo utilizzato come campione di misura dieci misurazioni effettuate dagli studenti per poi calcolarne la media.

3. Abbiamo eseguito la stessa procedura per cinque volte, misurando sia l'altezza del pendolo (che diminuiva ad ogni misurazione tramite alcuni giri del filo intorno all'asta orizzontale) che il periodo di oscillazione.

4. Una volta misurati e raccolti tutti i dati che ci sarebbero serviti, li abbiamo organizzati in tabelle e grafici.

<u>Dati e la loro Elaborazione</u>

Una volta effettuate e raccolte le corrette misurazioni abbiamo raccolto i dati in tabelle.
Come prima cosa abbiamo elaborato le misure delle altezze del pendolo ogni volta che la lunghezza diminuiva dopo la misurazione delle oscillazioni.

I dati raccolti sono riportati nella tabella sottostante

N. misurazione	(h_0) cm	(h) cm	(l) cm
Misurazione n. 1	h_0= (9,8 ±0,1) cm	h = (47,4±0,1) cm	(37,6±0,2) cm
Misurazione n. 2	h_0= (16,3±0,1) cm	h = (47,4±0,1) cm	(31,1±0,2) cm
Misurazione n. 3	h_0= (23,0±0,1) cm	h = (47,4±0,1) cm	(24,4±0,2) cm
Misurazione n. 4	h_0= (29,6±0,1) cm	h = (47,4±0,1) cm	(17,8±0,2) cm
Misurazione n. 5	h_0= (36,4±0,1) cm	h = (47,4±0,1) cm	(11,0±0,2) cm

N.B.
h_0= altezza compresa tra il banco di lavoro e la massa (baricentro della pallina)
h = altezza compresa tra il banco di lavoro e l'asta orizzontale (mezzadria dell'asta)
l = altezza del pendolo, (h- h_0) [es. misurazione n.1, l = (47,4±0,1) - (9,8 ±0,1) = (37,6±0,2)]

Dopodiché abbiamo raccolto le misurazioni del periodo di oscillazione del pendolo. Per ogni altezza del pendolo sono state raccolte ed elaborate dieci misurazioni. Durante l'organizzazione dei valori sono stati individuati valori sopra o sotto la media, classificati come fuori scala [sono raffigurati nella tabella sottostante barrati ~~x~~].

Le misurazioni in secondi sono:

- Primo gruppo: ~~13,52;~~-12,99; 12,12; 12,50; 13,04; 13,18; ~~13,63~~; 13,07; 13,24, 12,27; 13,13; 12,96
- Secondo Gruppo: 11,78; 11,61; 11,27; 11,93; 11,66; 11,22; 11,80; 11,60; ~~13,18~~; 11,45; 11,86
- Terzo Gruppo: 9,90; 10,45; 9,78; 10,15; 11,18; 10,07; 10,03; 9,78; 10,00; 10,30
- Quarto Gruppo: 8,41; 8,61; 8,75; 9,07; 8,44; 9,17; 8,85; 8,82; 8,73; 8,60
- Quinto gruppo: 7,40; 6,93; 7,90; 8,00; 6,67; 8,01; 6,58; 6,81; 7,73; 6,91

[Ogni gruppo corrisponde ad un'altezza differente del pendolo]

Misurazione n.1 [s]	Misurazione n.2 [s]	Misurazione n.3 [s]	Misurazione n.4 [s]	Misurazione n.5 [s]
13,13	11,78	9,90	8,41	7,40
12,99	11,61	10,45	8,61	6,93
12,12	11,27	9,78	8,75	7,90
12,50	11,93	10,15	9,07	8,00
13,04	11,66	11,18	8,44	6,67
13,18	11,22	10,07	9,17	8,01
12,96	11,80	10,03	8,85	6,58
13,07	11,60	9,78	8,82	6,81
13,24	11,45	10,00	8,73	7,73
12,27	11,86	10,30	8,60	6,91
~~13,52~~	~~13,18~~	-------------	-------------	-------------
~~13,63~~	-------------	-------------	-------------	-------------

*nella tabella sono evidenziati i valori minimi e i valori massimi utilizzati per il calcolo della semidispersione.

Raccolte le misurazioni del periodo di oscillazione abbiamo calcolato la media delle misure ottenute, in modo da scoprire la durata media di 10 oscillazioni <10 T> [T= periodo di oscillazione].

Nelle prime misurazioni (ovvero facenti parti del primo gruppo), per esempio, la media è:

Media <10T> = (12,99 + 12,12 + 12,50 + 13,04 + 13,18 + 13,07 + 13,24 + 12,27 + 13,13 + 12,96) /10 = 128,10 /10 = 12,81 secondi <10 T>

Una volta calcolata la media su dieci oscillazione troviamo la durata media su una sola oscillazione (<T>) stabilendo il rapporto tra <10 T> e 10.

Media <T> = 12,81 /10 = 1,281 secondi <T>

Ripetiamo il calcolo della media e con tutti gli altri valori delle diverse misurazioni; i risultai sono riportati nella tabella sottostante.

	Media <10 T> [secondi]	**Media <T> [secondi]**
N.1 l = (37,6±0,2) cm	12,81	1,281
N.2 l = (31,1±0,2) cm	11,62	1,162
N.3 l = (24,4±0,2) cm	10,16	1,016
N.4 l = (17,8±0,2) cm	8,75	0,875
N.5 l = (11,0±0,2) cm	7,29	0,729

Come ogni valore anche il periodo di oscillazione del pendolo ha una grandezza fisica a cui è associato un errore, per calcolarlo bisogna trovare la semidispersione tra i diversi valori.
La media <T> è il valore medio, mentre, l'εa corrisponde alla semidispersione, calcolata con il rapporto tra la differenza tra il valore massimo e il valore minimo diviso 2.
Nella tabella precedente i valori massimi sono evidenziati di verde, mentre i valori minimi sono evidenziati di giallo.

Possiamo procedere con il calcolo della semidispersione massima al fine di trovare la misura con errore del periodo di oscillazione del pendolo.

Nel primo caso la semidispersione (o εa) su dieci oscillazioni è uguale a:

$$\varepsilon a = e = \left(\frac{13,24 - 12,12}{2}\right) = 0,56$$

Per trovare la semidispersione su un'oscillazione bisogna dividere per 10, quindi

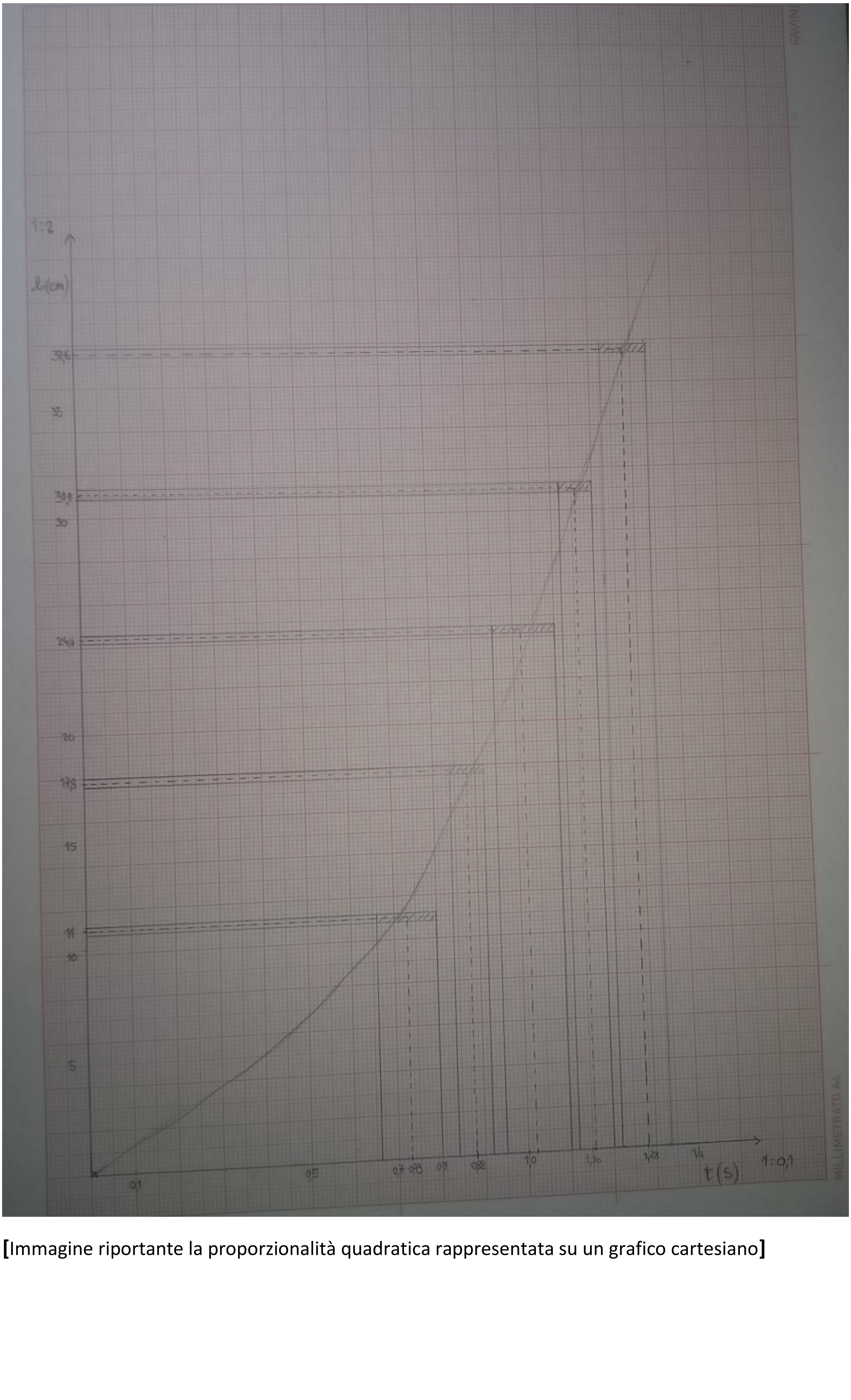
$$\varepsilon a = \frac{0,56}{10} = 0,056$$

Perciò, il periodo di oscillazione della prima misurazione è:

$$< T > = (1,281 \pm 0,056)\ secondi$$

Svolgiamo lo stesso procedimento e gli stessi calcoli con anche le altre misure, al fine di verificare la proporzionalità diretta tra grandezze fisiche. Tutti i risultati sono riportati nella tabella.

L [cm]	**<T> [secondi]**
N.1 l = (37,6±0,2)	(1,281±0,056)
N.2 l = (31,1±0,2)	(1,162±0,036)
N.3 l = (24,4±0,2)	(1,016±0,070)
N.4 l = (17,8±0,2)	(0,875±0,038)
N.5 l = (11,0±0,2)	(0,729±0,071)



[Immagine riportante la proporzionalità quadratica rappresentata su un grafico cartesiano**]**

Facendo ciò siamo stati in grado di calcolare e verificare la proporzionalità quadratica tramite la parabola del grafico cartesiano, ma, per confermare la nostra tesi dobbiamo dimostrare che L e T^2 sono legati dalle proporzionalità diretta. Per far ciò dobbiamo calcolare T^2 tramite l'algoritmo della propagazione degli errori.

Nel primo caso $T^2 = T \cdot T = (1{,}281 \pm 0{,}056) \cdot (1{,}281 \pm 0{,}056)$

Si calcola il prodotto tra i valori senza errore:

$1{,}281 \cdot 1{,}281 = 1{,}641\ s^2$

Poi si procede con il calcolo seguendo l'algoritmo:

$$\varepsilon r(T) = \frac{0{,}056}{1{,}281} = 0{,}044$$

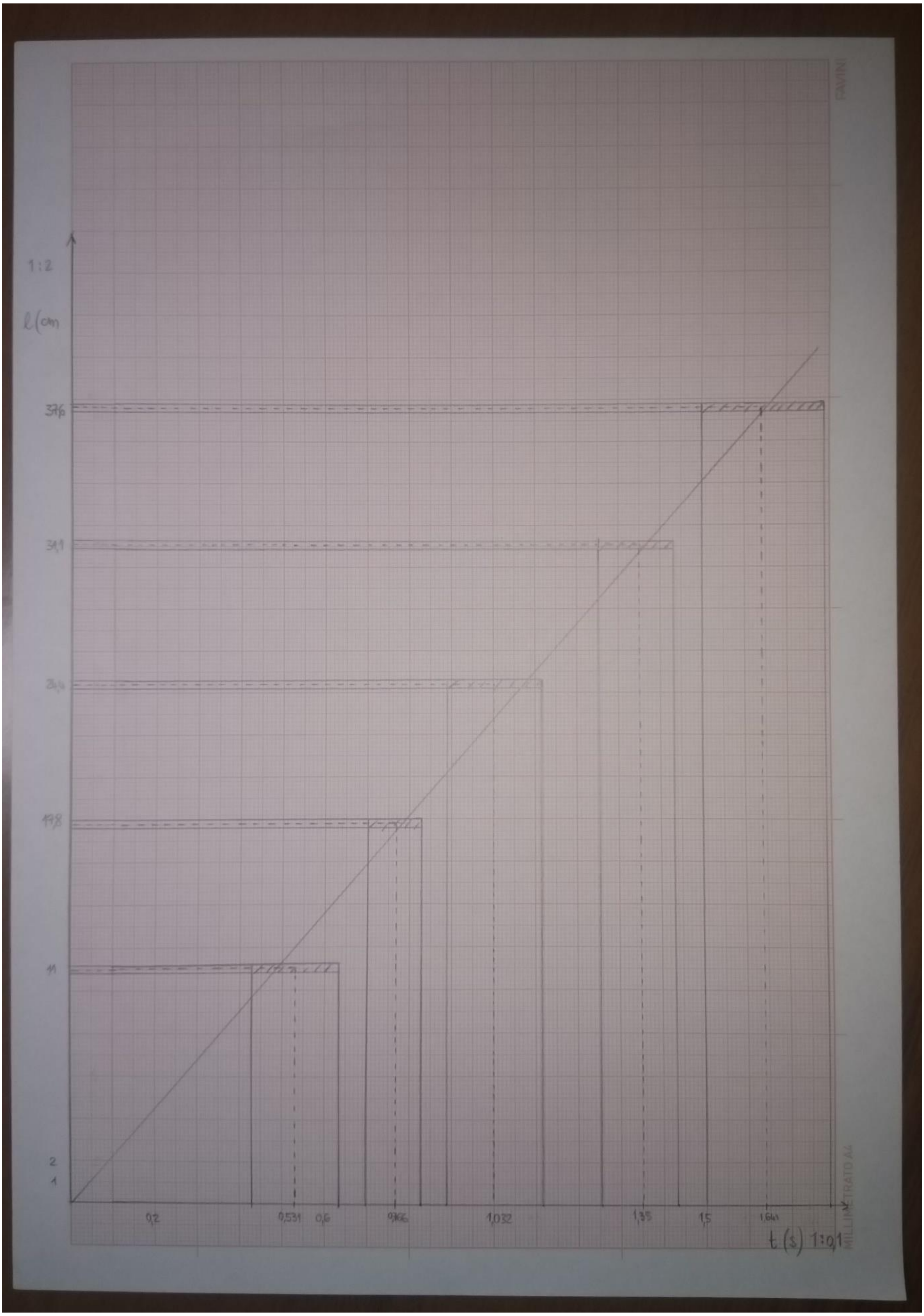
$$\varepsilon r(T^2) = 0{,}044 + 0{,}044 = 0{,}088$$

$$\varepsilon a = 0{,}088 \cdot 1{,}641 = 0{,}144\ secondi^2$$

Quindi, possiamo affermare che $T^2 = (1{,}641 \pm 0{,}144)\ secondi^2$.

Eseguiamo i medesimi calcoli attraverso l'algoritmo per tutte le misurazioni effettuate, per verificare la proporzionalità diretta tra i valori calcolati.

<T> [secondi]	$\boldsymbol{< T^2 > [secondi^2]}$
N.1 <T> = (1,281±0,056)	$(1{,}641 \pm 0{,}144)$
N.2 <T> = (1,162±0,036)	$(1{,}350 \pm 0{,}084)$
N.3 <T> = (1,016±0,070)	$(1{,}032 \pm 0{,}142)$
N.4 <T> = (0,875±0,038)	$(0{,}766 \pm 0{,}066)$
N.5 <T> = (0,729±0,071)	$(0{,}531 \pm 0{,}103)$



[Immagine riportante la proporzionalità diretta rappresentata su un grafico cartesiano]

Conclusioni

Grazie a questo esperimento abbiamo verificato con successo la proporzionalità quadratica e diretta tra grandezze fisiche. Ne sono la prova i grafici realizzati, che rappresentano, in un caso, una parabola nascente dall'origine (proporzionalità quadratica), mentre, nell'altro, una semiretta nascente dall'origine (proporzionalità diretta). Le ipotesi da noi formulate, quindi, sono state confermate.