

Esperimento 8:
Verifica sperimentale delle leggi del moto parabolico

Lo scopo dell'esperimento è dimostrare le leggi che regolano il moto parabolico.

Strumenti e materiali

- Cannoncino con proiettile (piccola sfera);
- Goniometro stampato su carta;
- Base di supporto per cannoncino e goniometro;
- Asta graduata (portata: 1,20 m o più; sensibilità: 0,01 m);
- Base di appoggio sopraelevata;
- Righello;
- Livella;
- Filo a piombo;
- Spessori.

Premessa teorica

Il moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme e un moto rettilineo uniformemente accelerato perpendicolari tra loro. Si arriva a questa conclusione dal fatto che un punto materiale lanciato dall'origine con velocità diretta sull'asse x, ossia MRU, è soggetto anche a una forza verticale diretta verso il basso, ossia la forza di gravità che rappresenta MRUA. Nelle formule la forza di gravità è preceduta dal segno - perché agisce verso il basso.

Le leggi orarie dei due assi sono:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Queste leggi sono in funzione del tempo, perciò:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 \end{cases}$$

Essendo quest'ultima l'equazione della parabola, si parla di moto parabolico.

Supponendo che si tratti del lancio orizzontale di un proiettile, si definisce tempo di volo t l'arco di tempo che il proiettile impiega per ricadere a terra e gittata G la distanza percorsa durante questo arco temporale. Ipotizzando che il proiettile parta da un punto P sopraelevato rispetto all'origine, con quota $(0; h)$, l'equazione dell'asse verticale è:

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

E di conseguenza sostituendo t

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Per trovare la gittata, bisogna intersecarla con l'asse x, perciò:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \Rightarrow 0 = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \Rightarrow x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases}$$

Da questo si ricava il tempo di volo:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Fino ad ora è stato considerato un angolo di alzo A pari a 0°, se invece è presente un angolo diverso da 0° e il punto di partenza ha quota (0; 0), la parabola passa per l'origine e la velocità iniziale è:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos A \vec{i} + v_0 \sin A \vec{j}$$

Le componenti risultano quindi essere:

$$\begin{aligned} \text{Verticale: } v_{0x} &= v_0 \cos A \\ \text{Orizzontale: } v_{0y} &= v_0 \sin A \end{aligned}$$

Partendo da:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

E sostituendo il tempo:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \Rightarrow \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}x - \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x = 0 \end{cases}$$

Si ottengono due soluzioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{g}{2v_{0x}^2}x - \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \end{aligned}$$

Dalla seconda si ottiene la formula della gittata:

$$G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \Rightarrow G = \frac{2v_0^2 \cos A \sin A}{g} \Rightarrow G = \frac{v_0^2 \sin 2A}{g}$$

La gittata è massima quando $2A = 90^\circ$, perciò $A = 45^\circ$

La formula del tempo perciò è:

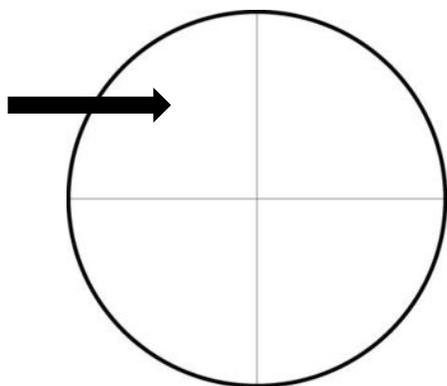
$$t = \frac{2v_0 \sin A}{g}$$

L'altezza massima raggiunta durante il lancio si calcola:

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Procedimento

1. Creare un supporto a forma di L, composto da una base piana orizzontale e una parete verticale, creando così un angolo retto.
2. Fissare il cannoncino sulla base piana del supporto e regolarlo orizzontale, cioè a 0° .
3. Realizzare un quadrante di circonferenza (vedi immagine seguente). Su questo disegnare dieci raggi con un'inclinazione crescente di 10° e un raggio a 45° e segnare i valori degli angoli. La lunghezza dei raggi deve essere di poco superiore a quella del cannoncino.



Questo è il goniometro, dal quale va ritagliato il quadrante indicato.

4. Fissare il quadrante sulla parete verticale, in modo che il raggio a 0° sia parallelo alla base di appoggio e che il centro corrisponda al fulcro intorno al quale può inclinarsi il cannoncino.
5. Posizionare la struttura precedentemente creata sulla base di appoggio sopraelevata dal suolo di 55 cm.
6. Sul pavimento, sotto la base di appoggio, sistemare l'asta graduata.
7. Allineare verticalmente lo 0 dell'asta con l'estremità della bocca del cannoncino e assicurarsi che abbiano la stessa direzione, aiutandosi con righello, livella e filo a piombo.
8. Inserire nel cannoncino il proiettile e azionarlo, segnando la misura corrispondente al punto in cui il proiettile è caduto sull'asta graduata.
9. Ripetere il punto precedente altre 6 volte.
10. Appoggiare la struttura comprendente cannoncino e goniometro al suolo.
11. Regolare il cannoncino con un'inclinazione di 45° .
12. Inserire degli spessori sotto l'asta graduata per portarla all'altezza della bocca del cannoncino.
13. Verificare con la livella che l'asta sia orizzontale.
14. Verificare che l'asta graduata e il cannoncino abbiano la medesima direzione.
15. Inserire nel cannoncino il proiettile e azionarlo, segnando la misura corrispondente al punto in cui il proiettile è caduto sull'asta.
16. Ripetere il punto precedente altre 6 volte.
17. Regolare il cannoncino con un'inclinazione di 60° .
18. Modificare gli spessori sotto l'asta graduata per portarla all'altezza della bocca del cannoncino.
19. Verificare con la livella che l'asta sia orizzontale.
20. Verificare che l'asta graduata e il cannoncino abbiano la medesima direzione.
21. Inserire nel cannoncino il proiettile e azionarlo, segnando la misura corrispondente al punto in cui il proiettile è caduto sull'asta graduata.
22. Ripetere il punto precedente altre 6 volte.
23. Regolare il cannoncino con un'inclinazione di 30° .
24. Modificare gli spessori sotto l'asta per portarla all'altezza della bocca del cannoncino.
25. Verificare con la livella che l'asta sia orizzontale.
26. Verificare che l'asta e il cannoncino abbiano la medesima direzione.
27. Inserire nel cannoncino il proiettile e azionarlo, segnando la misura corrispondente al punto in cui il proiettile è caduto sull'asta graduata.
28. Ripetere il punto precedente altre 6 volte.
29. Riportare i dati in tabelle ed eseguire gli opportuni calcoli.

Dati e loro elaborazione

| v_0 | | | | | | |
|--------|-----|--|-----------|--|---|--------------------------------------|
| h | A | G misurate | G media | $v_0 = \sqrt{\frac{g \times G^2}{2h}}$ | $v_x = v_0 \cos A$ | $v_y = v_0 \sin A$ |
| 0,55 m | 0° | 1,05 m 1,00 m 0,97 m 1,00 m 0,97 m 0,99 m 0,95 m | 1,00 m | $\sqrt{\frac{9,8 \times 1,00^2}{2 \times 0,55}}$ = 2,98 m/s | $v_x = 2,98 \cos 0^\circ$ = 2,98 m/s | $v_y = 2,98 \sin 0^\circ$ = 0 m/s |

| Confronto fra G_m e G_c con angolo di alzo di 45° | | | | | |
|--|-----------|----------|-----|---|---|
| G misurate | G media | v_0 | A | $G = \frac{v_0^2 \times \sin 2A}{g}$ | scarto % = $\frac{G_m - G_c}{G_c} \times 100$ |
| 0,90 m 0,98 m 0,96 m 0,97 m 0,96 m 0,95 m 0,93 m | 0,95 m | 2,98 m/s | 45° | $\frac{(2,98)^2 \times \sin(2 \times 45^\circ)}{9,8}$ = 0,91 m | $\frac{0,95 - 0,91}{0,91} \times 100 = 4,4\%$ |

| Confronto fra G_m e G_c con angolo di alzo di 60° | | | | | |
|--|-----------|----------|-----|---|---|
| G misurate | G media | v_0 | A | $G = \frac{v_0^2 \times \sin 2A}{g}$ | scarto % = $\frac{G_m - G_c}{G_c} \times 100$ |
| 0,95 m 0,90 m 0,94 m 0,91 m 0,90 m 0,90 m 0,82 m | 0,90 m | 2,98 m/s | 60° | $\frac{(2,98)^2 \times \sin(2 \times 60^\circ)}{9,8}$ = 0,78 m | $\frac{0,90 - 0,78}{0,78} \times 100 = 15\%$ |

| Confronto fra G_m e G_c con angolo di alzo di 30° | | | | | |
|--|-----------|----------|-----|---|---|
| G misurate | G media | v_0 | A | $G = \frac{v_0^2 \times \sin 2A}{g}$ | scarto % = $\frac{G_m - G_c}{G_c} \times 100$ |
| 0,81 m 0,77 m 0,72 m 0,85 m 0,83 m 0,82 m 0,77 m | 0,80 m | 2,98 m/s | 30° | $\frac{(2,98)^2 \times \sin(2 \times 30^\circ)}{9,8}$ = 0,78 m | $\frac{0,80 - 0,78}{0,78} \times 100 = 2,5\%$ |

| <i>Componenti verticali e orizzontali con angolo di alzo diverso da 0°</i> | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|
| <i>Angolo di alzo = 45°</i> | | <i>Angolo di alzo = 60°</i> | | <i>Angolo di alzo = 30°</i> | |
| $v_x = v_0 \cos A$ | $v_y = v_0 \sin A$ | $v_x = v_0 \cos A$ | $v_y = v_0 \sin A$ | $v_x = v_0 \cos A$ | $v_y = v_0 \sin A$ |
| v_x = $2,98 \cos 45^\circ$ = $2,11 \text{ m/s}$ | v_y = $2,98 \sin 45^\circ$ = $2,11 \text{ m/s}$ | v_x = $2,98 \cos 60^\circ$ = $1,49 \text{ m/s}$ | v_y = $2,98 \sin 60^\circ$ = $2,58 \text{ m/s}$ | v_x = $2,98 \cos 30^\circ$ = $2,58 \text{ m/s}$ | v_y = $2,98 \sin 30^\circ$ = $1,49 \text{ m/s}$ |

Conclusioni

Lo scopo dell'esperimento è dimostrare le leggi che regolano il moto parabolico.

L'esperienza di laboratorio è riuscita perché i valori ottenuti tramite i calcoli e le misurazioni effettuate risultano essere molto simili.

Lo scarto percentuale è dovuto agli errori sistematici o casuali che sono stati commessi durante l'esperimento, ad esempio a causa di un allineamento non preciso tra il cannoncino e l'asta millimetrata.

La prima parte dell'esperimento è dedicata alla misurazione della gittata con angolo di alzo 0°, in modo da poter calcolare v_0 , dato indispensabile per la seconda parte.

Nella seconda parte dell'esperienza di laboratorio l'angolo di alzo era diverso da 0°, ordinatamente 45°, 60°, 30°.

Lo scarto minore è presente nella terza prova, mentre quello maggiore nella seconda.

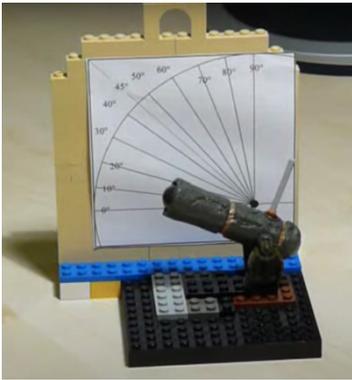
La gittata massima si ottiene con angolo di alzo uguale a 45°, perciò essa diminuisce sia con valori superiori che inferiori ad esso. Inoltre, le gittate calcolate con alzo di 60° e 30° hanno lo stesso valore: infatti i due angoli differiscono della stessa ampiezza rispetto a 45°, con cui si raggiunge la gittata massima.

La componente x di v_0 è pari alla velocità 0 stessa, essendo il coseno di 0° uguale a 1: $\cos 0^\circ = 1$; mentre la componente y di v_0 è 0 essendo il seno di 0° uguale a 0: $\sin 0^\circ = 0$

Invece, per quanto riguarda le componenti v_x e v_y degli angoli 45°, 60° e 30° si può notare che:

- Hanno lo stesso valore quando l'angolo considerato è la metà di un angolo retto, ossia 45°;
- v_x con inclinazione 60° ha lo stesso valore di v_y con inclinazione di 30° essendo i due angoli complementari; lo stesso vale per le altre due componenti, cioè v_y di 60° e v_x di 30°, che risultano essere appunto uguali.

Tutti i valori sono stati trasportati precedentemente nell'unità di misura fondamentale del Sistema Internazionale.



Cannoncino e goniometro su base di supporto



Misurazione della gittata per poter calcolare v_0



Misurazione della gittata con $A = 45^\circ$



Misurazione della gittata con $A = 60^\circ$



Misurazione della gittata con $A = 30^\circ$

Tutte le immagini sono tratte dal video "Fisica – Moto Parabolico – 2F Liceo Medi Villafranca 2009/2010". <https://www.youtube.com/watch?v=lam8uhxbUI8>