

LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Uno strumento matematico fondamentale nella teoria della relatività ristretta.

Mostrane alcuni utilizzi.

TRATTAZIONE TEORICA

Le **trasformazioni di Lorentz**, introdotte nel 1904, sono **leggi di trasformazione della posizione e del tempo** che esprimono il cambiamento delle coordinate spazio-tempo tra due sistemi di riferimento inerziali, e sono alla base della teoria della relatività ristretta. Questa teoria parte dalla **generalizzazione delle trasformazioni di Galileo**, che in Meccanica mettono in relazione le coordinate spaziali e temporali come viste da un sistema di riferimento inerziale fisso alle medesime coordinate spaziali e temporali come viste da un sistema di riferimento inerziale che si muove di moto rettilineo uniforme.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, il primo S e il secondo S', dunque tali da essere in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Più precisamente supponiamo che:

- i due sistemi presentino gli assi x e x' coincidenti;
- il sistema S' si muova con velocità costante v_Ω rispetto al primo nella direzione dell'asse $x = x'$, per cui gli assi $y//y'$ e $z//z'$ siano paralleli durante il moto;
- le due origini O e Ω coincidano al tempo $t = t' = 0$.

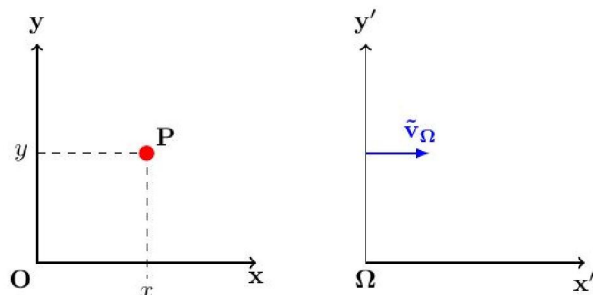
Le trasformazioni di Galileo ci dicono che:

$$x' = x - vt$$

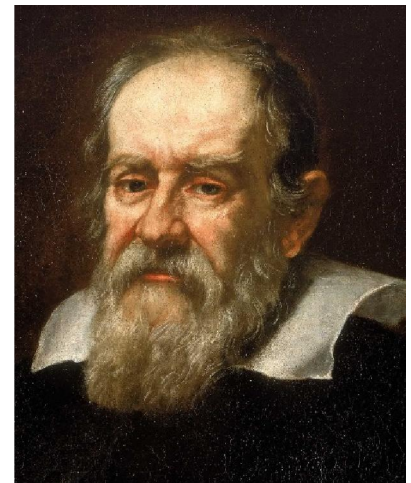
$$t' = t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



dove v è la velocità del sistema di riferimento mobile rispetto al sistema di riferimento fisso, ovvero la velocità di trascinamento, che in questo caso è costante e in figura è indicata con v_Ω .



Si noti come in queste equazioni la misura del tempo è indipendente dal sistema di riferimento: **il tempo è assoluto**. La misura di esso non dipende dalla posizione: **spazio e tempo sono indipendenti**.

Sulla base della definizione di velocità, si deduce la regola di **composizione galileiana delle velocità** che, nel caso di un moto parallelo all'asse x si esprime come: $v_{x'}^2 = v_x - v_{\Omega}$

o, equivalentemente: $v_x = v_{x'} + v_{\Omega}$

dove v_x è la velocità del punto nel SR fisso e $v_{x'}$ quella nel sistema mobile.

Questa formula è molto significativa. Essa ci dice che la velocità di un corpo rispetto a terra è uguale alla somma della velocità del corpo rispetto al SR mobile più la velocità del sistema mobile stesso rispetto a terra. In parole povere **le velocità si sommano**.

Dopo la pubblicazione nel 1873 del trattato sull'**elettromagnetismo** da parte di Maxwell e la conseguente scoperta delle onde elettromagnetiche si pose una grossa questione.

Le onde elettromagnetiche ipotizzate da Maxwell e sperimentalmente verificate dal fisico tedesco Hertz nel 1888, godevano infatti di una bizzarra proprietà per cui la velocità finita con cui esse si propagano ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s nel vuoto) era sempre la stessa indipendentemente dalla velocità della sorgente che le emette, cioè indipendentemente dal sistema di riferimento considerato.

Evento dimostrato dall'**esperimento di Michelson-Morley**. I due scienziati dimostrarono nel 1887 che **la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento** e che quindi si sottrae alla regola di composizione della velocità. Questa situazione rende immediatamente **non più valide le trasformazioni di Galileo** se applicate a corpi che si muovono a velocità prossime alla velocità della luce.

Il genio di Einstein arriva adesso, quando nel 1905 formula la teoria della relatività ristretta a partire da due postulati:

- 1- **PRINCIPIO DI RELATIVITÀ**: le leggi della fisica si esprimono nella stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- 2- **PRINCIPIO DI INVARIANZA DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE**: la velocità della luce nel vuoto misurata in qualsiasi sistema di riferimento inerziale ha sempre lo stesso valore ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

Il suo merito, per quanto riguarda le trasformazioni di Lorentz, è quello di aver dato una base pratica a queste trasformazioni per le coordinate che rispettano i due postulati della relatività ristretta e che sostituiscono le trasformazioni di Galileo.

Le **trasformazioni di Hendrik Lorentz**, dal nome del fisico olandese che le scrisse nel 1904 quando era alla ricerca di trasformazioni tali per cui le leggi dell'elettromagnetismo risultassero invarianti, sono le **leggi relativistiche che sostituiscono le trasformazioni di Galileo**.

Esattamente come nel caso di Galileo, consideriamo un SR che si muove rispetto a terra con velocità v lungo l'asse x . Le trasformazioni di Lorentz, che sostituiscono quelle di Galileo, sono le seguenti:



$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

dove $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma$ e si dice **fattore di Lorentz** o fattore relativistico.

Per simmetria, le trasformazioni di Lorentz inverse si ottengono da quelle dirette scambiando t' , x' , y' , z' con t , x , y , z e sostituendo V con $-V$.

Si può anche verificare che, se si considerano due eventi E_1 e E_2 le cui coordinate in S sono (t_1, x_1, y_1, z_1) e (t_2, x_2, y_2, z_2) , allora le variazioni $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, delle loro coordinate si trasformano anch'esse secondo le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

Bisogna considerare due osservazioni molto importanti.

La prima è che, per $v \ll c$, $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$, **le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo**, perché si può trascurare la contrazione delle lunghezze in movimento. Al contrario, se il SR mobile che stiamo considerando si muove con una velocità paragonabile a quella della luce, il fattore γ diventa sempre più influente all'avvicinarsi di $v \rightarrow c$.

La seconda cosa è che, al contrario delle trasformazioni di Galileo in cui $t'=t$, la misura del tempo dipende dal sistema di riferimento: **il tempo non è assoluto**. Inoltre esso **interviene nelle trasformazioni**, in particolare x' dipende da t e, allo stesso modo, t' dipende da x . **Spazio e tempo sono interdipendenti**.

La composizione relativistica delle velocità deve essere dunque differente, se vogliamo salvaguardare i principi fondanti della Relatività. La si può dedurre dalle trasformazioni:

$$v = \frac{v_{\Omega} + v'}{1 + \frac{v_{\Omega} \cdot v'}{c^2}}$$

Qualunque sia il valore di v_{Ω} e di v' , v è sempre minore di c . Si ha $v = c$ solo se una delle due velocità uguaglia c .

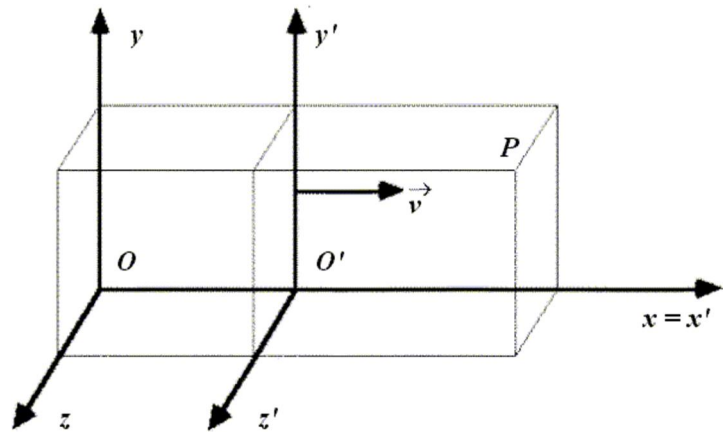
La portata di questa rivoluzione concettuale è **enorme**. Le principali conseguenze di queste trasformazioni sono la **contrazione delle lunghezze**, la **dilatazione dei tempi** e la **simultaneità di due eventi relativa all'osservatore**; tutte conseguenze coerenti con la teoria della relatività ristretta.

Applicando le trasformazioni di Lorentz alle **equazioni di Maxwell**, queste ultime **si trasformano** mantenendo la stessa espressione in tutti i sistemi di riferimento inerziali. **Le leggi di Newton** invece **perdono di significato** perché risultano incompatibili con i postulati della relatività. Ad esempio, una forza costante applicata a un oggetto per un tempo sufficientemente lungo, nella meccanica newtoniana potrebbe portare l'oggetto a possedere una velocità maggiore di quella della luce. Le leggi della dinamica in relatività ristretta sono state perciò riformulate e assumono quindi una forma diversa rispetto a quelle di Newton.

SPIEGAZIONE DELLE SCELTE MATEMATICHE OPERATE

Dimostrazione delle formule delle trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali, ed un altro che si sposta rispetto ad esso con velocità costante v in modo che gli assi x e x' coincidano scivolando l'uno sull'altro, e gli altri (y e y' , z e z') restino



paralleli fra di loro, e consideriamo i due diversi sistemi di coordinate: $S(x, y, z, t)$ e $S'(x', y', z', t')$, riferiti rispettivamente alle origini O e O' . Se S' si muove rispetto a S con velocità v , per la

contrazione delle lunghezze sarà: $O'P' = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Infatti, considerando in S un punto P dell'asse $x = x'$, punto che corrisponde a P' nel sistema S' , le sue coordinate rispetto ai due sistemi risulteranno: $P(x, 0, 0, t)$ e $P'(x', 0, 0, t')$

$O'P' = x'$ se S' è fermo, perché se è in moto con velocità v esso si contrae nella direzione del moto riducendosi ad una lunghezza $O'P'$.

Ma essendo $O'P' = OP - OO' = x - vt$, si deduce che:

$$x - vt = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

da cui:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ordinata e quota rimangono uguali, visto il modo in cui S' si muove rispetto a S . Si consideri invece la coordinata temporale. Il segmento OP rispetto al sistema S' è uguale alla somma di:

$$OO' = vt \quad \text{con} \quad O'P = O'P' = x'$$

Il segmento OP , però, se S' fosse fermo, misurerebbe x ; in effetti si muove con velocità v , e dunque, nella direzione del moto, risulta più corto:

$$OP(S') = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Quindi

$$vt' + x' = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

dove x' corrisponde a ciò che è stato precedentemente dimostrato:

$$vt' + \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

moltiplicando ambedue i membri per $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ho:

$$vt' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + x - vt = x - x \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

da cui si ricava, senza alcuna difficoltà:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si hanno così le trasformazioni di Lorentz spiegate alle pagine 2 e 3.

Dimostriamo ora la composizione relativistica delle velocità. La si può dedurre dalle trasformazioni inverse:

$$t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

dividendo membro a membro:

$$\frac{x}{t} = \frac{x' + v_0 t'}{t' + \frac{v_0 x'}{c^2}}$$

A questo punto basta dividere entrambi i termini della frazione al secondo membro per t' :

$$\frac{x}{t} = \frac{\frac{x'}{t'} + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} \cdot \frac{x'}{t'}}$$

ma $\frac{x}{t} = v$ (in S) e $\frac{x'}{t'} = v'$ (in S'). Perciò:
$$v = \frac{v_0 + v'}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}}$$

Qualunque sia il valore di v_0 e di v' , v è sempre minore di c . Si ha $v = c$ solo se una delle due velocità uguaglia c , perché allora:

$$v = \frac{v_0 + c}{1 + \frac{v_0 \cdot c}{c^2}} = \frac{c(v_0 + c)}{v_0 + c} = c$$

APPLICAZIONI TECNOLOGICHE

Come abbiamo detto se le trasformazioni di Lorentz vengono applicate a sistemi con velocità molto minore a quella della luce si riducono alle trasformazioni di Galileo e quindi non saranno rilevanti i fenomeni di contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi. Tuttavia non è un compito facile quello di far viaggiare un sistema a velocità prossime a quelle della luce in modo da poter notare gli effetti che ci propongono le trasformazioni di Lorentz.



La **propulsione nucleare ad impulso** è un metodo di propulsione spaziale che utilizza una serie di esplosioni nucleari per produrre una spinta di un veicolo spaziale e permette di far viaggiare sistemi anche all'80% della velocità della luce. Il metodo fu proposto negli anni 50 del '900 e da lì iniziarono vari progetti per la realizzazione di veicoli spaziali che viaggiassero in questo modo.

Il primo progetto fu il **progetto Orione**, il cui veicolo avrebbe dovuto essere costituito da un razzo recante alla base un grande disco metallico montato su un sistema di ammortizzatori; al centro del disco doveva esservi un'apertura per il rilascio all'esterno di piccole **bombe atomiche a fissione**. Le onde d'urto create in successione dalle esplosioni di ciascuna bomba avrebbero colpito il disco e fornito la spinta all'astronave.

Il **Progetto Dedalo** è uno studio per realizzare un'astronave per viaggi interstellari senza equipaggio umano. A differenza del Progetto Orione, il Progetto Dedalo prevede l'uso di esplosioni generate dalla **fusione nucleare** anziché dalla fissione. Secondo i progettisti, l'astronave potrebbe raggiungere **un decimo della velocità della luce**.

È stata poi sviluppata l'idea di utilizzare il sistema denominato **ACMF**, cioè *Antimatter Catalyzed Micro Fission/Fusion*, che utilizzerebbe l'**antimateria** per catalizzare delle reazioni a catena di fissione nucleare, le quali avrebbero poi innescato a loro volta delle reazioni di fusione nucleare, che avrebbero fornito l'energia per la propulsione dell'astronave. Secondo i ricercatori questo metodo potrebbe spingere il veicolo spaziale fino a **otto decimi della velocità della luce**.

I passeggeri a bordo di questi veicoli risentirebbero così dei fenomeni di dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze che sono messi in evidenza dalle trasformazioni di Lorentz.

ESEMPI ILLUSTRATIVI DELL'ARGOMENTO

Problema 1. L'antenna di una sonda spaziale si trova nella posizione $x = 0$ cm ed emette due impulsi agli istanti 0,00 ns e 0,58 ns. Determina le coordinate temporale e spaziale di questi due eventi nel sistema di riferimento di un'astronave che si muove parallelamente a x con velocità $0,60c$.

Soluzione. Le coordinate dei due eventi rispetto alla sonda sono ($t_1 = 0,00$ ns, $x_1 = 0$ cm) e ($t_2 = 0,58$ ns, $x_2 = 0$ cm). Il primo evento ha evidentemente coordinate uguali a zero anche rispetto all'astronave. Le coordinate del secondo evento rispetto all'astronave sono invece

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{0 \text{ m} - 0,60 \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})(0,58 \cdot 10^{-9} \text{ s})}{\sqrt{1 - 0,60^2}} = -13 \text{ cm}$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{0,58 \cdot 10^{-9} \text{ s} - 0 \text{ s}}{\sqrt{1 - 0,60^2}} = 0,73 \text{ ns}$$

Problema 2. Per l'osservatore O due eventi sono simultanei e separati da una distanza pari a $6 \cdot 10^2$ km. Qual è l'intervallo di tempo tra i due eventi per l'osservatore O', per il quale la distanza tra i due eventi è di $1,20 \cdot 10^3$ km?

Soluzione. Andiamo a prendere la distanza $\Delta x'$ che sarebbe ($x'_B - x'_A$) dove A e B sono i due eventi dell'esercizio, analogamente vale per Δx e Δt . Poiché i due eventi sono simultanei $\Delta t = 0$.

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v\Delta t) = \gamma \cdot \Delta x$$

Ne deriva che
$$\gamma = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{1200 \text{ km}}{600 \text{ km}} = 2$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

quindi
$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = 2 \left(- \frac{\sqrt{3}c \cdot 6 \cdot 10^5}{2c^2} \right) = - \frac{\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8} = -3,46 \cdot 10^{-3} \text{ s} = -3,46 \text{ ms}$$

Si conclude che mentre in O i due eventi sono simultanei, in O' i due eventi non lo sono e in particolare dato che $t'_B - t'_A < 0$, allora l'evento B è precedente all'evento A.

Problema 3. Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme nel riferimento fisso con legge oraria $x = x_0 + vt$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz inverse, determina la legge oraria nel riferimento mobile.

Soluzione. Nell'istante t il corpo occupa la posizione $x = x_0 + vt$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz inverse

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' - \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

la legge oraria diventa

$$\frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = x_0 + v \frac{t' - \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Risolvendo rispetto a x' si ottiene

$$x' = x_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} t'$$

in accordo con la contrazione delle lunghezze e con la composizione relativistica delle velocità.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Libro di testo in adozione https://online.scuola.zanichelli.it/cutnellproblemi-files/Cutnell_Lorentz.pdf

Libro online del prof Franco Maria Boschetto http://www.fmboschetto.it/tde/3_1.htm

Altri siti/pdf utili

<https://www.youmath.it/lezioni/fisica/teoria-della-relativita-ristretta/3418-trasformazioni-di-lorentz.html>

<http://www.mat.unimi.it/users/carati/didattica/dispense/relativita.pdf>

http://amsacta.unibo.it/4383/1/P22_%25E2%2580%2593_Propulsione_nucleare.pdf