Alfredo Scrosati 5 D a.s. 2019/2020

La distribuzione della radiazione di corpo nero

Nel corso del XIX e XX secolo, nel mondo della Fisica vennero effettuati alcuni esperimenti che misero in luce l'impossibilità della Fisica Classica di spiegare tutti i fenomeni della natura, in contrasto da quanto era ritenuto dai filosofi dell'ottocento.

Uno di questi fenomeni non spiegabili era proprio la radiazione di corpo nero.

Si dice **corpo nero** un corpo che assorbe completamente qualsiasi radiazione che riceve.

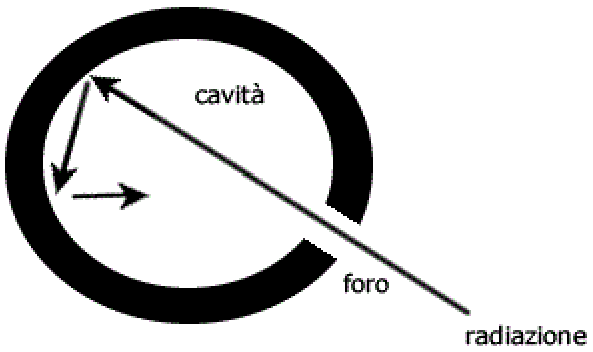
Ogni corpo infatti, una volta riscaldato, tende sempre ad emettere delle **radiazioni elettromagnetiche**, il cui spettro (ossia l'insieme delle frequenze di queste radiazioni) dipende dalla natura del corpo stesso. È infatti un'esperienza comune quella di vedere un corpo che, mentre viene arroventato, tende a scaldarsi e ad emettere una radiazione che varia dal rosso scuro fino al bianco man mano che sale la temperatura.

Le radiazioni emesse da un corpo non sono tuttavia necessariamente luminose: se il corpo in questione è soggetto a una temperatura inferiore a poche centinaia di Kelvin (quindi a temperature equivalenti a pochi gradi Celsius), le radiazioni emesse sono esclusivamente infrarossi, ossia di frequenza inferiore al visibile.

Ora, per visualizzare in maniera corretta il concetto di corpo nero, è necessario considerare il modello di una cavità nella quale la radiazione è in **equilibrio termico** con le pareti, ossia dove né la radiazione né le pareti di questa cavità subiscono trasformazioni termodinamiche una volta in contatto. Un modello che può fare al caso nostro è quello di una bottiglia affumicata dal collo stretto.

La distribuzione della radiazione di corpo nero

La radiazione che colpisce questa bottiglia sulla sua superficie esterna colorata di nero viene assorbita immediatamente, mentre quella che attraversa il suo foro è assorbita rapidamente dalla superficie interna, in quanto, riflettendosi moltissime volte, ha una scarsissima probabilità di fuoriuscire dalla bottiglia e viene completamente assorbita prima di riuscirci.
Ciò non è l'unico esempio di corpo nero che possiamo vedere nella vita di tutti i giorni: notiamo un fenomeno simile anche guardando nella porta di un edificio in una giornata soleggiata, dove quello che vedremo guardando all'interno della porta sarà infatti nient'altro che il buio.
Per studiare l'emissione di corpo nero occorrerà fare uso di alcuni strumenti dell'Analisi Matematica. Chiamiamo **e(f,T)** il **potere emissivo** di un corpo, ossia l'energia della radiazione emessa per unità di tempo, unità di superficie e intervallo unitario di frequenza; chiamiamo invece **a(f,T)** il **potere assorbente** di un corpo, ossia il rapporto fra l'energia assorbita e l'energia della radiazione incidente. Per definizione, questo valore sarà compreso tra 0 e 1: per il primo valore il corpo in questione sarà un corpo bianco (perfettamente riflettente), per il secondo sarà un corpo nero (perfettamente assorbente).



La distribuzione della radiazione di corpo nero

Se utilizziamo delle considerazioni di termodinamica, dimostriamo che il rapporto fra potere emissivo e potere assorbente è indipendente dal corpo considerato, ed è una funzione universale della frequenza e della temperatura. Poiché il corpo nero ha a(f,T)=1, allora il **potere emissivo del corpo nero è una funzione universale**, data da:

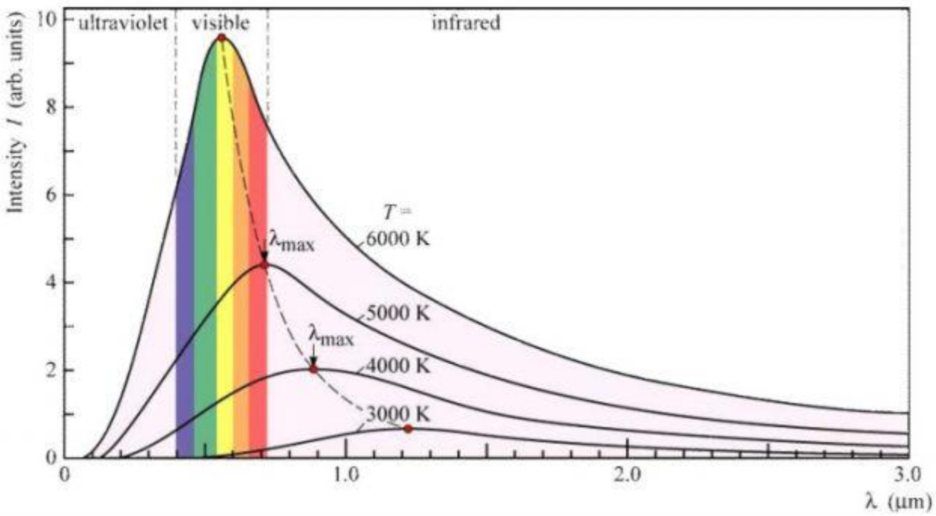
$$e(f,T) = \frac{c}{8\pi} \cdot u(f,T)$$

dove u(f,T) è la densità di energia per unità di volume associata, **c** è la velocità della luce nel vuoto e e(f,T)df è la potenza emessa per unità di area nell'intervallo di frequenza [f, f + df].

Rappresentando in un grafico il potere emissivo, ci accorgiamo che lo spettro (l'insieme delle frequenze) è continuo e presenta un massimo per una certa frequenza $\mathbf{f_{max}}$, che aumenta con l'aumentare della temperatura. In particolare, la lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda_{max}}$, corrispondente a questa frequenza massima è data dalla legge di Wien, o dello spostamento, la quale enuncia che:

$$\lambda_{max} \cdot T = b$$

Dove **b** è la **costante di Wien (2,898 · 10^{-3} m K)**



La distribuzione della radiazione di corpo nero

Ad esempio, possiamo osservare che il nostro Sole ha il massimo di emissione che si trova sulla frequenza di **625 · 10^{14} Hz**, il che corrisponde alla lunghezza d'onda di **480 nanometri**. La legge di Wien in questo caso ci permette di calcolare la temperatura superficiale del Sole:

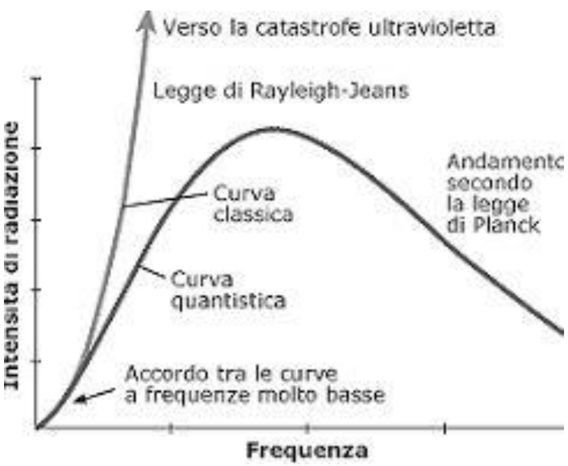
$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ m\ K}{480 \cdot 10^{-9} m} = 6037\ K$$

Ora, tornando sulla parte teorica del nostro ragionamento, integrando l'espressione del nostro potere emissivo su tutte le frequenze, otteniamo l'**energia totale della radiazione E**, la cui espressione è:

$$E = \sigma \cdot T^4$$

Dove σè la costante di Stefan-Boltzmann ($5{,}67 \cdot 10^{-8} W\ m^{-2} K^{-4}$). La legge ora ricavata è appunto la **legge di Stefan-Boltzmann**.

Come si vede dal diagramma della slide precedente, la nostra intensità diminuisce sia per le alte che per le basse frequenze. Se però si tenta di interpretare questo comportamento alla luce della fisica classica, sintetizzata nelle quattro **Equazioni di Maxwell**, si trovano risultati in contrasto con l'esperienza. Sfruttando l'elettrodinamica classica infatti, i fisici Rayleigh e Jeans elaborarono una legge, detta **Legge di Rayleigh e Jeans** (di cui sotto), che è in accordo con l'esperienza solamente a basse frequenze:



$$u(f,T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} K_B T$$

La distribuzione della radiazione di corpo nero

Difatti, se integriamo la Legge di Rayleigh e Jeans su tutte le frequenze, otteniamo paradossalmente un risultato infinito, il che significa che l'intensità dovrebbe **crescere indefinitamente all'aumentare della frequenza**. Se ciò fosse vero, otterremmo il fenomeno che descriviamo come **catastrofe ultravioletta**, termine che indica il paradosso in base al quale anche un forno domestico, se riscaldato in continuazione, diventerebbe una sorgente di raggi ultravioletti: nella realtà però, sappiamo benissimo che non è così.

La soluzione della mancata catastrofe ultravioletta fu ottenuta dal fisico **Max Planck**, che iniziò il suo ragionamento da una singola teoria: secondo lui, gli oscillatori armonici atomici possono scambiare con la radiazione pacchetti energetici che sono unicamente multipli interi di un'unità fondamentale, detto **quanto di energia**, il cui valore è pari a:

$$E = h\,f$$

Dove **f** è la frequenza ed **h** è una costante universale, detta **costante di Planck**. Il suo valore è misurabile tramite un esperimento che si può effettuare in qualsiasi laboratorio e che difatti, anche noi studenti di 5^D abbiamo provato a misurare. Consideriamo un **LED** che emette luce ogni volta che un elettrone si ricombina con una lacuna. Il LED che prendiamo in considerazione emette luce di lunghezza d'onda pari a **465 nanometri** con la frequenza di $\mathbf{6{,}45 \cdot 10^{14}}$ **Hz**. Alimentiamo il LED con un circuito contenente un **reostato**, ossia una resistenza variabile

Osserviamo il momento esatto dell'accensione del LED durante la variazione del reostato e registriamo la tensione agli estremi del LED mediante un voltmetro. Vediamo che la tensione corrisponde a circa **2,67 V**.

La distribuzione della radiazione di corpo nero

L'energia del singolo elettrone che attraversa il fotodiodo è pari a:

$$E = e\,\Delta V = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 2{,}67\ V = 4{,}272\ \cdot 10^{-19} J$$

Da cui ricaviamo, tramite la formula di Planck, che **h** è uguale a $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J s

Il valore che oggi accettiamo di **h** è uguale a $6{,}626070 \cdot 10^{-34}$ J s.

Planck calcolò la distribuzione di radiazione a sua volta utilizzando strumenti di Analisi Matematica. Se l'energia irraggiata assume dei valori discreti, il valore medio può essere calcolato in questo modo:

$$< E >= \sum_{E} E\ \cdot p(E)$$

dove **p(E)** è la probabilità che l'energia assuma il valore E, ed è data da: $p(E) = \frac{e^{-E/K_B T}}{\sum E \cdot e^{-E/K_B T}}$

Ora chiamiamo **E = n h f**, dove **n** è un numero intero, e poniamo: $x = \frac{h\,f}{K_B T}$

La formula precedente allora, diventa: $p(E) = \frac{e^{-x}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}}$

Quella che abbiamo a denominatore è una progressione geometrica di **periodo** $\mathbf{e^{-x}}$, e la sua somma è pari a: $\frac{1}{1-e^{-x}}$

Da ciò segue che la probabilità è: $p(E) = e^{-n\,x} \cdot (1 - e^{-x})$

La distribuzione della radiazione di corpo nero

Sostituendo tutto nell'espressione del valore medio dell'energia < **E** >, otteniamo, dopo varie semplificazioni, e ricostruendo infine il valore di **x**:

$$< E > = \frac{h\,f}{e^{\frac{h\,f}{K_B T}} - 1}$$

Trovata questa formula, consideriamo che la radiazione nella cavità di corpo nero si può considerare come un'onda stazionaria di vettori campo elettrico **E** e campo magnetico **B**. Decomponendo questi vettori nei loro modi normali, abbiamo che tra le frequenze **f** e **f + df** opera un numero **dn** di **oscillatori armonici classici**, pari a:

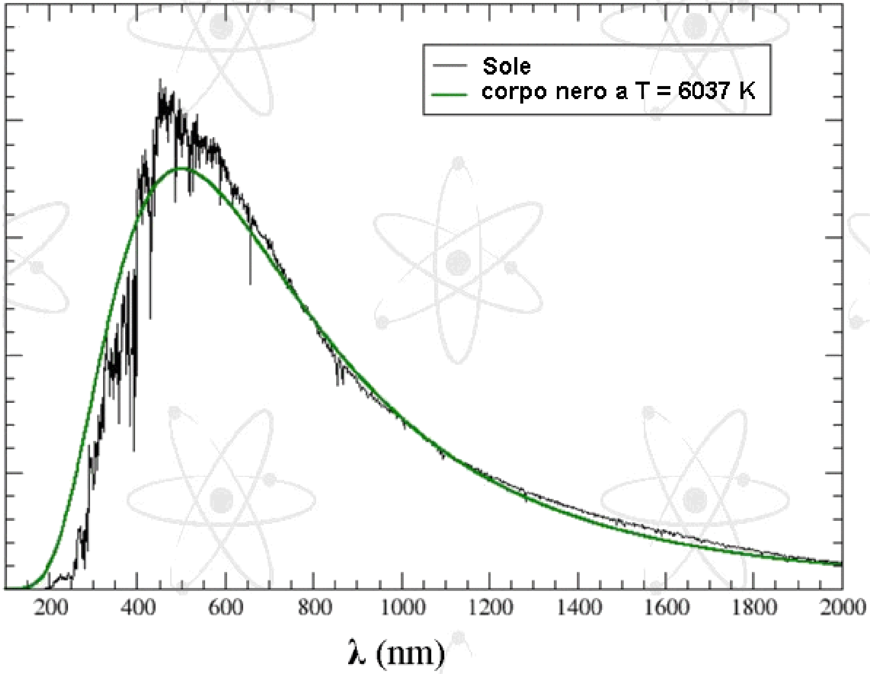
$$dn = 2\frac{(\,4\pi f^2 df)}{c^3}$$

Per il **teorema di equipartizione dell'energia**, ogni oscillatore nella cavità ha un'energia pari a < **E** > all'equilibrio termodinamico. Si ha dunque, dopo altre semplificazioni, che:

$$u(f,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1}$$

La distribuzione della radiazione di corpo nero

Se rappresentiamo questo andamento infatti, ci accorgiamo che è in accordo con i dati sperimentali, a differenza della Legge di Rayleigh e Jeans. Lo dimostra il grafico a lato, nel quale compariamo la curva di emissione del Sole con la distribuzione di Planck ricavata per la temperatura di **6037 K** che abbiamo calcolato prima.



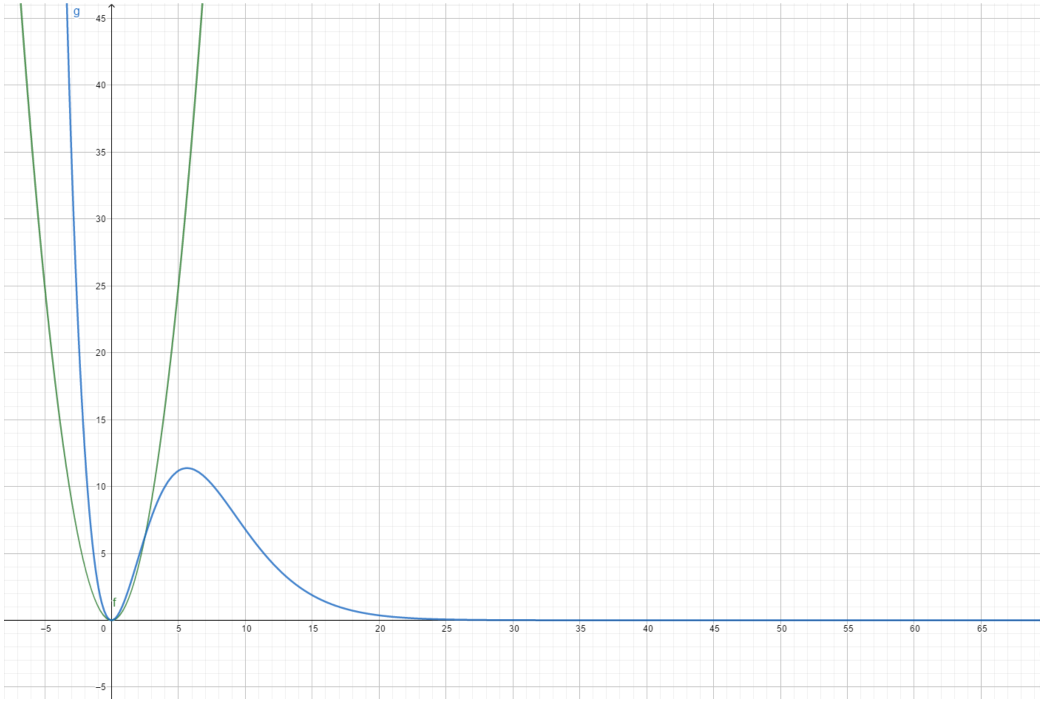
Planck stesso fu spaventato dal fatto che la sua teoria aveva scosso i fondamenti della Fisica Classica, e se proviamo a pensare che lui stesso fu in qualche modo scettico riguardo le sue scoperte, possiamo immaginare come reagirono i suoi colleghi fisici.
Nonostante però l'enorme differenza che troviamo tra le teorie di Planck e di Rayleigh-Jeans, possiamo notare, tramite un semplice studio di funzione, una similitudine tra queste due teorie.
Se cerchiamo di semplificare le due funzioni in maniera da poterne studiare il grafico in maniera abbastanza semplice, quelle che otterremo saranno le due funzioni **f** e **g** che qui seguono:

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{k}} - 1}$$

La distribuzione della radiazione di corpo nero

Se fissiamo un valore di temperatura molto basso, come ad esempio T=5, possiamo notare da entrambe le funzioni un comportamento asintotico con l'asse delle x per x che tende a 0. Ecco qui rappresentate le funzioni in questione:

Da questa semplice considerazione possiamo dedurre che le teorie che si rifacevano alla Fisica Classica e alla Fisica Quantistica riguardanti il corpo nero, sebbene, come abbiamo visto, portavano a risultati completamente diversi, avevano delle opinioni molto simili per gli studi che riguardavano valori di frequenza molto bassi, in quanto i risultati che entrambe ottenevano erano dei valori di intensità di radiazione molto vicina allo zero.



Bibliografia: I problemi della fisica- Induzione e onde elettromagnetiche. Relatività, atomi e nuclei – J.D. Cutnell, K.W. Johnson, D. Young e S. Stadtler

Sitografia: www.fmboschetto.it , www.fisica.unipv.it, www.geogebra.org/graphing