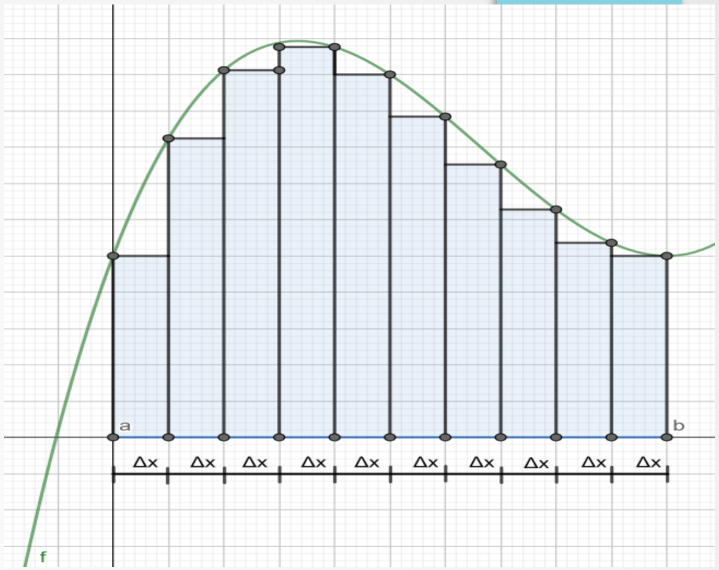
L’integrale definito

Daniel Testa, 5 D a.s. 2019/20

- Sia f(x) una funzione continua e ipoteticamente positiva nell’intervallo [a;b] , con a < b.
- Scomponiamo l’intervallo [a;b] in n intervalli più piccoli, che assumiamo uguali, e indichiamo l’ampiezza di questi intervalli con Δx, che è pari a $\frac{b-a}{n}$.
- Siano m_i e M_i, rispettivamente, il minimo e il massimo dei valori di f(x) nell’iesimo intervallino.
- m_i e M_i esistono per il teorema di Weierstrass, per cui “Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo”.
- Consideriamo ora le seguenti due somme di Riemann:

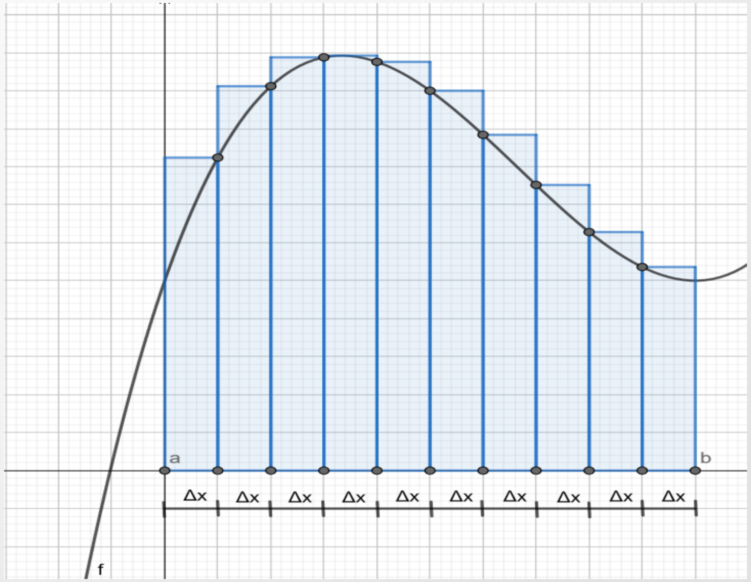
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$

- s_n prende il nome di plurirettangolo inscritto nel trapezoide, ed è la somma delle aree degli n rettangoli aventi per basi gli intervalli in cui è stato diviso l’intervallo [a;b] e per altezze le ordinate minime m_i della funzione in tali intervalli;
- S_n prende il nome di plurirettangolo circoscritto al trapezoide, ed la somma delle aree degli n rettangoli aventi per basi gli intervalli in cui è stato diviso l’intervallo [a;b] e per altezze le ordinate massime M_i della funzione in tali intervalli



s_n

S_n



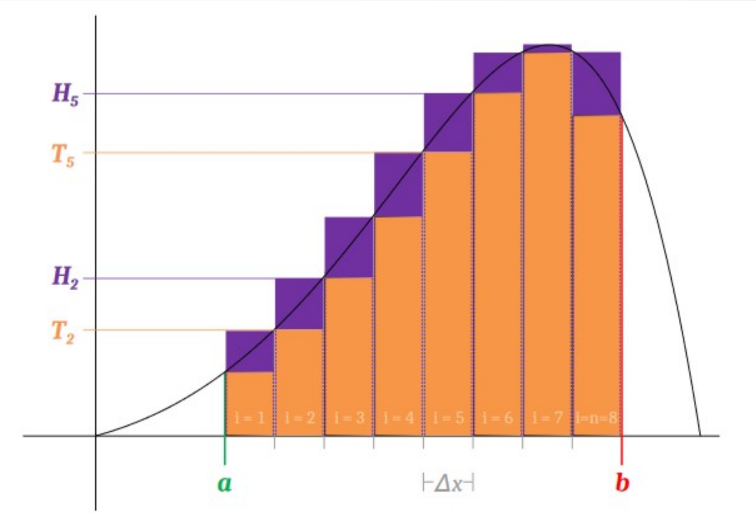
L'integrale definito

- Evidentemente sn≤Sn per qualunque n. Il valore delle somme sn e Sn dipende dalla scomposizione adottata per [a,b]: s_n e S_n sono due funzioni reali della variabile naturale n, sono cioè due successioni.

- Ci sono molteplici definizioni di successione, alcune più rigorose di altre, ma per semplicità definiremo come successione "una legge che permette di determinare, con un finito numero di operazioni matematiche, un qualsiasi termine della successione, a partire dal valore di n."

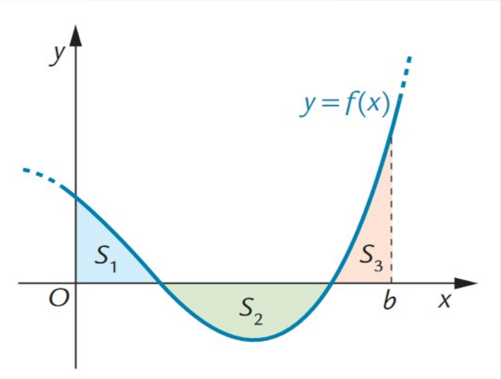
- Da tutto quello che è stato detto si elabora il Teorema dell'integrale definito: "Se f(x) è una funzione continua e non negativa in [a;b], le due successioni s_n e S_n sono convergenti e convergono verso lo stesso numero, cioè ammettono lo stesso limite finito per n →+ ∞ e risulta: $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$ "

- Da questo teorema poi si può estrapolare la definizione di integrale definito secondo Riemann: "Data la funzione f(x), continua in [a ; b], con a < b, il valore comune del limite delle successioni s_n e S_n si chiama integrale definito della funzione continua f(x) esteso all'intervallo [a,b], e si indica con la scrittura:
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty} S_n$$

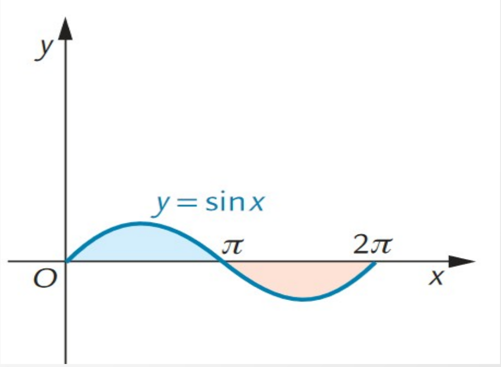


Interpretazione geometrica

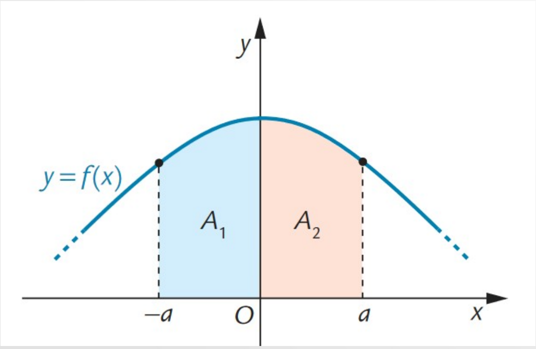
- Precedentemente si è visto il processo che sta alla base dell'integrale, supponendo che la funzione di riferimento sia positiva nell'intervallo [a,b]. Ora invece illustrerò alcune considerazioni geometriche legate all'integrale definito.

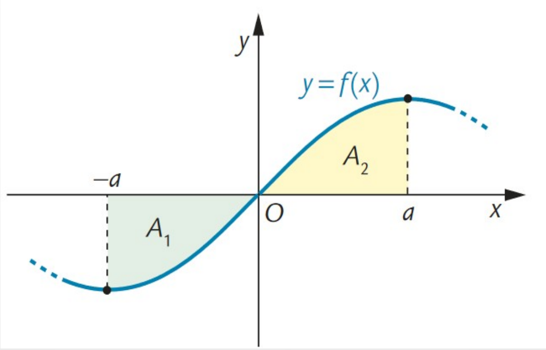


- Nel caso in cui la funzione di riferimento cambi il suo segno all'interno dell'intervallo [a,b], l'integrale si può interpretare come la somma di aree con segno: $\int_a^b f(x)dx = area\,S_1 - area\,S_2 + area\,S_3$ e da questo si deduce che: $\int_o^{2\pi} sinx\,dx = 0$



- Esistono anche delle importanti considerazioni che vanno dette riguardo alle funzioni pari e dispari. Se f è pari pari: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, mentre se f è dispari $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



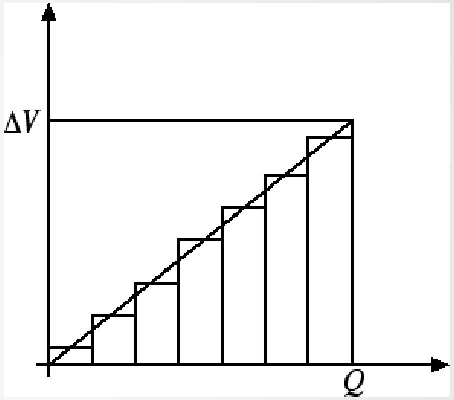


Il calcolo dell’integrale definito

- La definizione di integrale definito di per sé non si presta molto bene al calcolo effettivo dell’integrale. Il calcolo dell’integrale definito avviene solitamente sulla base del Primo teorema fondamentale del calcolo integrale, il quale dice “Sia f(x) una funzione continua in è [a,b] e sia F(x) una sua primitiva in [a,b]. Allora: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$“
- Dimostrazione: Suddividiamo l’intervallo [ab] in n intervalli più piccoli di ampiezza $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Ora scriviamo F(b)-F(a) come la somma delle differenze dei valori assoluti di F(x) agli estremi di ogni intervallo Δx in cui è stato suddiviso [a,b].
- $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{(x-1)})]$
- In questa espressione $F(x_1)$ si elide con $-F(x_1)$, $F(x_2)$ si elide con $-F(x_2)$, e così via. Gli unici termini che non si elidono sono $-F(x_0)$ e $F(x_n)$, quindi: $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{(i-1)})]$
- A questo punto si applica il Teorema di Lagrange a F(x) in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Ne segue che esiste $c_i \in [x_{(i-1)} - x_i]$ tale che:
  $F(x_i) - F(x_{(i-1)}) = F'(c_i)(x_i - x_{(i-1)}) = f(c_i)(x_i - x_{(i-1)})$
- Possiamo quindi riscrivere tutto come:
  $$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{(i-1)}) = \sum_{i_1}^{n} f(c_i)\Delta x$$
- Nell’ultimo membro però riconosciamo una Somma di Riemann, già citata in precedenza, della funzione f in [a,b]. Per questo motivo possiamo far tendere l’incognita n della sommatoria a più infinito con un limite in modo tale da trovare la forma finale della formula, cioè:
  $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

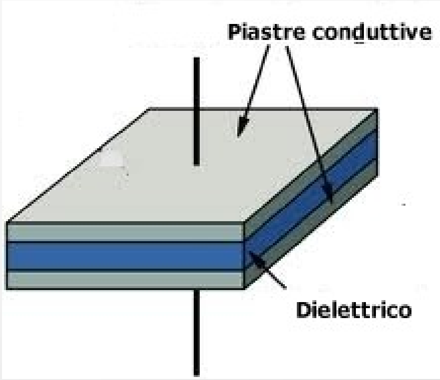
In fisica

- L'idea che sta alla base del calcolo dell'integrale era ben nota ad Archimede di Siracusa. Egli la usò per il calcolo dell'area del cerchio attraverso il cosiddetto "Metodo di esaustione", che consiste nella costruzione di una successione di poligoni che convergono alla figura data. Questo metodo prese la forma che ha oggi nel Seicento grazie a Newton e Leibniz, i quali dimostrarono indipendentemente il teorema fondamentale del calcolo della derivata. Essi dimostrarono con l'uso del limite che l'area dello scaloide (un poligono formato da una successione di parallelogrammi o parallelepipedi) tende all'area del trapezoide, di cui abbiamo parlato in precedenza..



- Uno dei maggiori utilizzi dell'integrale definito in fisica è il calcolo del lavoro. Questo è il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento, e nel grafico avente queste due grandezze come assi è rappresentato come l'area sottesa alla funzione in un dato intervallo: $L=\int_{t_1}^{t_2} F(s)ds$

- Il calcolo del lavoro risulta molto utile all'interno del condensatore piano. Questo è un sistema fisico formato da due lastre piane, dette armature del condensatore, cariche di segno opposto e separate ad una distanza molto piccola dal vuoto o da un isolante, chiamato dielettrico. Il condensatore immagazzina la carica elettrica nelle due armature e il dielettrico impedisce l'incontro tra le due cariche di segno opposto. L'energia che esso immagazzina è detta energia potenziale, che è uguale al lavoro necessario per caricarlo. $L=q\cdot\Delta V$



- L' unità di misura della capacità di un condensatore è il Farad F, ma poiché il farad è un' unità di misura molto grande, i valori dei condensatori comunemente utilizzati in elettronica si esprimono in microfarad, nanofarad, o picofarad.

Il condensatore

- Il funzionamento di un condensatore può essere suddiviso in due principali fasi:
  1. La fase di carica: in cui il condensatore accumula la carica all'interno delle sue armature, fino al raggiungimento della sua Capacità massima, ovvero la quantità di carica che le armature possono sopportare.
  2. La fase di scarica: in cui il condensatore "rilascia" la carica trattenuta all’esterno.

- La capacità, sopracitata, del condensatore il rapporto tra la carica immagazzinata e la differenza di potenziale tra le armature: $C = \frac{q}{\Delta V} \rightarrow q = C \cdot \Delta V$

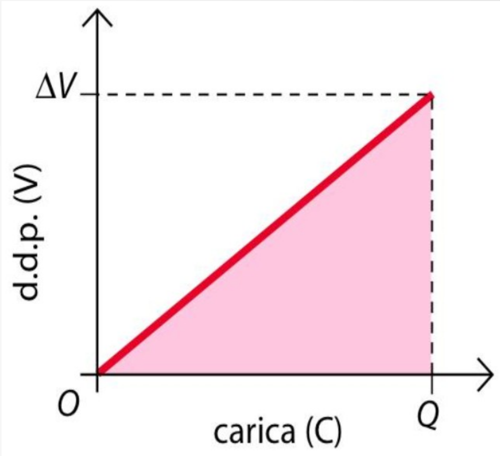
- Tale rapporto però è costante in quanto dipende unicamente dalla geometria del sistema.

- Sostituendo la formula della carica derivata da quella per trovare la capacità alla carica presente nella formula del lavoro si potrebbe dedurre che il lavoro è uguale al prodotto tra la carica e il quadrato della differenza di potenziale, ma questo si contraddice con la prima formula riportata. $L = q \cdot \Delta V \neq q \cdot \Delta V^2$

- Allo scopo di calcolare il vero lavoro del condensatore torna utile l’integrale definito. Ponendo su un diagramma cartesiano la carica e la tensione elettrica come assi il lavoro svolto dal condensatore risulta nell’area sottesa alla funzione del grafico in un determinato intervallo.

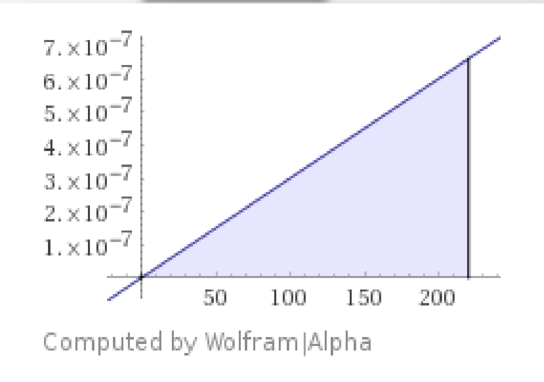
- Nei casi più semplici in cui la tensione elettrica sia costante o sia direttamente proporzionale alla carica, il lavoro verrà trovato calcolando l’area rispettivamente di un parallelepipedo e di un triangolo. Invece per funzioni più complesse ci si affida al calcolo integrale con la seguente formula:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} q\, dV = \int_{V_1}^{V_2} C \cdot V\, dV = C \int_{V_1}^{V_2} V\, dV = C \left[\frac{V^2}{2} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{1}{2} C V_2^2 - \frac{1}{2} C V_1^2$$



Esercizio

- Un condensatore piano ad armature parallele possiede una carica q=6,6 10^-7C su ciascuna armatura e tra queste è presente una differenza di potenziale d.d.p.=220V. Trova la capacità del condensatore e il lavoro utilizzato per portare il condensatore a 220V.



- Come è stato detto prima la carica è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale e la loro costante di proporzionalità è detta Capacità[F]. $C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-7}C}{220\,V}=3\cdot 10^{-9}F=3\,nF$

- Ora possiamo trovare l'area sottesa al grafico avente come assi la carica e la differenza di potenziale nell'intervallo [0 V;220 V]. Per fare ciò applichiamo la definizione di integrale definito,il primo teorema per il calcolo dell'integrale definito e la formula inversa utilizzata per calcolare la capacità.

$$L=\int_{V_0}^{V_1} q\,dV=\int_{V_0}^{V_1} C\cdot V\,dVL=C\int_{V_0}^{V_1} V\,dV=C\left[\frac{V^2}{2}\right]_{V_0}^{V_1}=\frac{1}{2}CV_1^2-\frac{1}{2}CV_0^2=\frac{1}{2}C\,V_1^2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^{-9}\cdot(220)^2=7{,}26\cdot 10^{-5}J$$

- C'è da notare che la capacità è una costante del condensatore e quindi esce fuori dall'integrale per il principio di linearità dell'integrale definito.

- Inoltre il secondo termine risultante dall'applicazione del teorema del calcolo integrale si elide in quanto la tensione elettrica nel momento zero è uguale a zero e quindi annulla tutto il termine.

- Seguendo tutti i passaggi fino alla fine si giunge alla conclusione che il lavoro sotteso alla funzione che descrive il condensatore sopracitato è pari a $7{,}26\cdot 10^{-5}J$

Bibliografia e sitografia

- Bibliografia:

La matematica a colori – edizione blu per il quinto anno – Leonardo Sasso

I problemi della fisica- Onde, Campo elettrico e magnetico a cura di Claudio Romeni – J.D. Cutnell, K.W. Johnson, D. Young e S. Stadtler

- Sitografia:

https://www.matematicamente.it/appunti/successioni-e-serie/successioni-numeriche/

https://www.wolframalpha.com/

https://it.openprof.com/wb/integrali_definiti?ch=291

http://users.mat.unimi.it/users/colombo/biotecII/MatematicaAssistita/Arg08-13/Teoria9.pdf

https://it.wikitolearn.org/index.php?title=Speciale:Libro&bookcmd=download&collection_id=801a17cc42b5afd59fd285696ece67a4661c7128&writer=rdf2late

http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/corsi/archivio_pdf/calculusxfis.pdf

https://www.chimica-online.it/fisica/condensatore.htm

https://www.geogebra.org/calculator