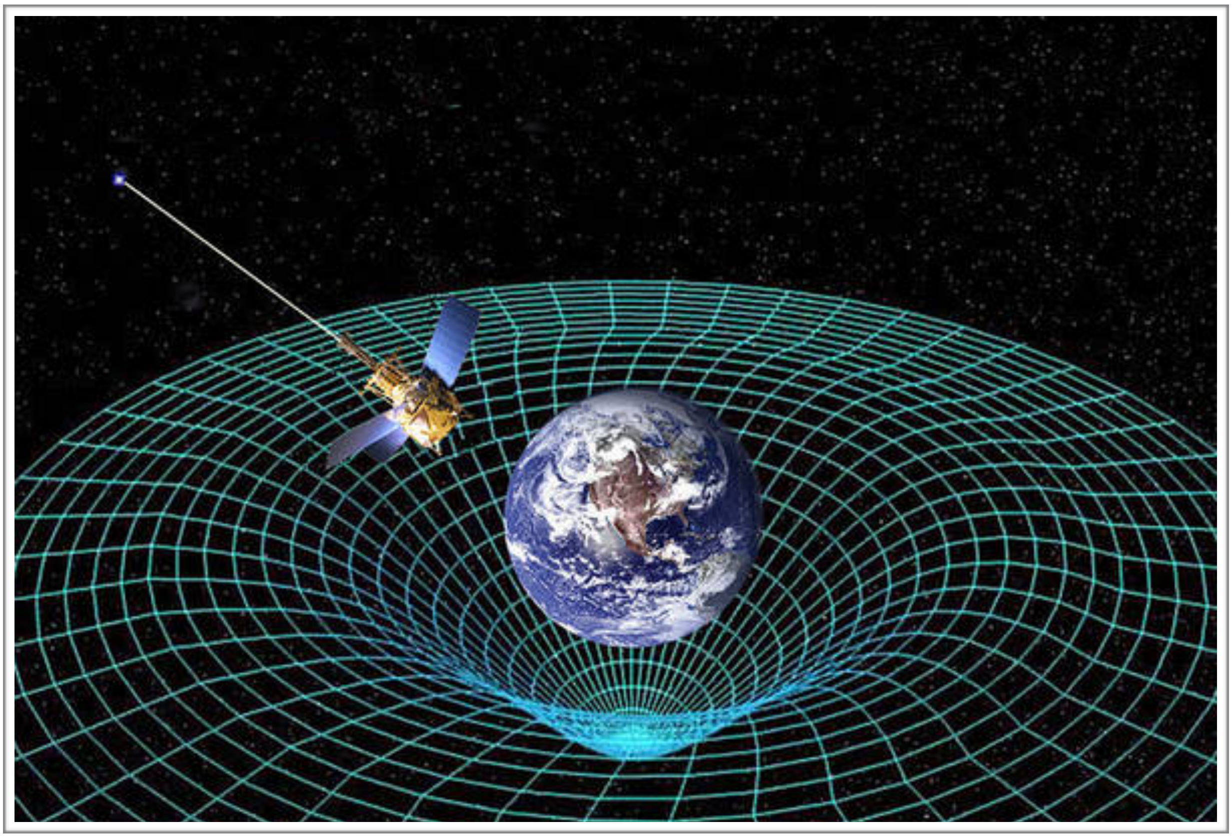
Dalle geometrie non euclidee alla curvatura dello spazio

Sofia Cattaneo 5^E



Anno Scolastico 2019-2020

Liceo Scientifico Leonardo Da Vinci

I cinque postulati di Euclide

Per definire le geometrie non euclidee è necessario introdurre i fondamenti di quella euclidea, a partire dai 5 postulati fondamentali enunciati negli “Elementi” di Euclide, che sono i seguenti:

I. per due punti qualsiasi passa una e una sola retta;
II. la linea retta può essere prolungata indefinitamente;
III. dato un punto e una distanza, è possibile descrivere un cerchio che ha come centro il primo come raggio il secondo;
IV. tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;

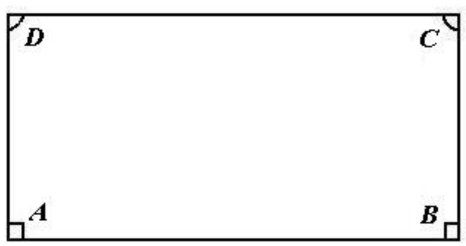
Il V postulato è definibile in diverse forme, che seguono:

- Se in un piano una retta, incontrandone altre due, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.
- Per un punto fuori di una retta passa una ed una sola parallela alla retta data.

Il quinto postulato, a differenza degli altri quattro, non è intuitivo ed ha una struttura più simile ad un teorema che ad un’asserzione; inoltre, nell’enunciato si utilizza il concetto di infinito, che i Greci rifiutavano in quanto per loro significasse caos, apeiron, incompiutezza. Tale assioma divenne quindi un problema, un difetto in un’opera perfetta come fu quella degli “Elementi” : moltissimi matematici, nel corso dei secoli, provarono a dimostrarlo o riformularlo, con la consapevolezza che una modifica all’ assioma avrebbe riguardato anche tutti i teoremi dimostrati con l’ausilio di questo, intaccando l’intero rigore logico dell’opera.

Girolamo Saccheri (1667-1733)

Nel 1600, il padre gesuita Girolamo Saccheri, convinto che il postulato fosse invece un teorema, e deducibile dagli altri quattro, tentò la dimostrazione per assurdo: ipotizzando la negazione dell’assioma, intendeva dimostrare che si sarebbe pervenuti ad una contraddizione.



Dimostrazione

Egli costruì un quadrilatero birettangolo isoscele, noto come "quadrilatero di Saccheri”, una figura formata da due lati opposti uguali tra loro, da un lato (AB),chiamato base, perpendicolare ai suddetti e dal lato opposto alla base chiamato sommità (CD). Egli dimostrò che nel quadrilatero gli angoli in C e D devono essere per forza uguali, quindi considerò che gli angoli in C e D dovessero essere o entrambi retti, o entrambi ottusi o entrambi

acuti. La dimostrazione per assurdo doveva giungere alla contraddittorietà della seconda e terza ipotesi, chiamate appunto “ipotesi dell’angolo ottuso” e “ipotesi dell’angolo acuto”.
Considerando l’ipotesi dell’angolo ottuso, come per quello retto dimostrò che una perpendicolare e un’obliqua ad una retta di incontrano e, quindi , anche il V postulato vale: ma questo implica che la somma degli angoli interni di ogni triangolo sia due retti, mentre per l’ipotesi stessa degli angoli ottusi, questa dovrebbe essere maggiore di due retti. In questo caso Saccheri riuscì a giungere ad una contraddizione e potè enunciare la seguente:
L’ipotesi dell’angolo ottuso è completamente falsa, perché distrugge se stessa.
Tuttavia non potè dire lo stesso dell’ipotesi dell’angolo acuto: egli cadde in un errore nelle dimostrazioni, estrapolando all’infinito proprietà valide al finito. Non potè dimostrare alcuna contraddizione, ma soltanto che:
L’ipotesi dell’angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta.
Egli credette così di aver confutato anche la seconda ipotesi, dimostrando tuttavia solo e soltanto l’assurdità delle conseguenze di questa; l’assurdità di un sistema, però, non è sufficiente a dimostrarne la contraddittorietà e insensatezza logica, ma soltanto l’ incapacità ad intuirlo.
Saccheri, dunque, contrariamente ai suoi intenti, segnò una svolta nell'ambito dello sviluppo delle geometrie non euclidee, di fatto costruendo il primo esempio di geometria iperbolica, che verrà poi elaborata ampiamente da Lobachevskij e Bolyai.

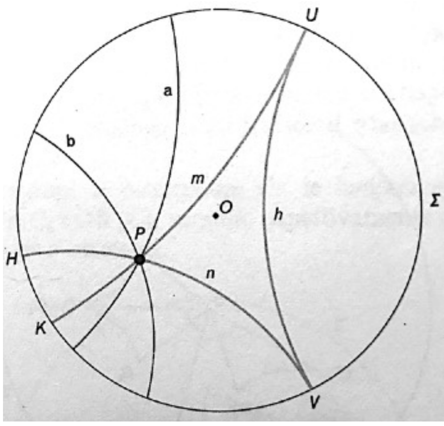
Seguirono, nei due secoli successivi, numerosi matematici europei, come: **Lambert** e **Legendre**, che apportarono nuovi e definitivi contributi alla teoria delle parallele; **Schweikart**, convinto della possibilità logica di una nuova geometria che definì “astrale”; **Taurinus**, sebbene convinto che la geometria euclidea fosse l’unica in grado di descrivere fedelmente lo spazio fisico, ottenne le formule fondamentali della geometria non euclidea, che egli chiamò “logaritmico-sferica”. Egli evidenziò come le formule della nuova trigonometria si potessero ottenere da quelle della usuale trigonometria sferica, considerando immaginario il raggio della sfera (*r i* al posto di *r*).

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Il primo grande matematico a riconoscere chiaramente la possibilità della nuova geometria fu Karl Friedrich Gauss; egli era convinto che la geometria non potesse costituirsi come scienza puramente a priori, ma che necessitasse anche di una corretta **intuizione** dello spazio esterno, rivelandosi sostanzialmente kantiano. Egli condusse un’indagine profonda sul quinto postulato, giungendo all’importante conclusione che “la geometria non euclidea non contiene assolutamente nulla di contraddittorio, sebbene molti risultati debbano sulle prime essere ritenuti paradossali; tuttavia scambiare ciò per una contraddizione sarebbe unicamente un'illusione, provocata dalla vecchia abitudine a considerare la geometria euclidea come strettamente vera".

Egli giunse ad importanti scoperte sulla nuova geometria:

- Non esistono figure simili che non siano anche uguali;
- Gli angoli di un triangolo equilatero non hanno misura costante ma, al crescere della lunghezza dei lati, divengono piccoli a piacere;
- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°.



Il triangolo della nuova geometria non euclidea è rappresentabile come PVU, secondo un modello che poi verrà presentato. Si intuisce che all'aumentare della lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli diminuisce.

Parallelamente alla ricerca di Gauss ci fu l'operato di Nikolaj Lobachevskij e Janos Bolyai, ritenuti oggi i padri fondatori della geometria non euclidea **iperbolica**, ovvero basata sulla negazione del quinto postulato che afferma l'esistenza di infinite rette parallele ad una data.

Nikolaj Lobachevskij (1793-1856) e **Janos Bolyai** (1802-1860)

Nel 1856 pubblicò *Pangeometria,* uno scritto contenente un'esposizione completa della nuova geometria da lui studiata, che definì "geometria immaginaria". Egli non si limitò ad affrontare la questione delle parallele, ma rivolse i suoi sforzi ad una **rifondazione globale** della geometria.

In netta opposizione alla concezione dello spazio kantiana, che invece Gauss condivideva, Lobachevskij assunse come concetti primitivi della sua geometria quelli di **corpo**, **contatto** tra corpi e **movimento rigid**o, ricavando proposizioni primitive della geometria da osservazioni di carattere sperimentale sul comportamento dei corpi fisici.

Pertanto, solo un secondo momento introdusse i concetti di retta e piano, derivandoli dal concetto di sfera, e dimostrò per essi le proprietà geometriche che si possono ricavare senza l'uso del quinto postulato; sviluppò quindi quella che oggi è detta la **geometria assoluta**, quel complesso di proposizioni geometriche che si possono dimostrare senza il V postulato, ottenendo risultati come l'indipendenza della sfera dal postulato e la dimostrazione dell'esistenza dei cinque poliedri regolari ottenuta senza ricorso a considerazioni sulle rette parallele.

L'assioma di Lobachevskij sul quale si basa la geometria iperbolica da lui sviluppata è il seguente:

dati in un piano una retta e un punto esterno, per il punto passano almeno due rette che non incontrano la retta data.

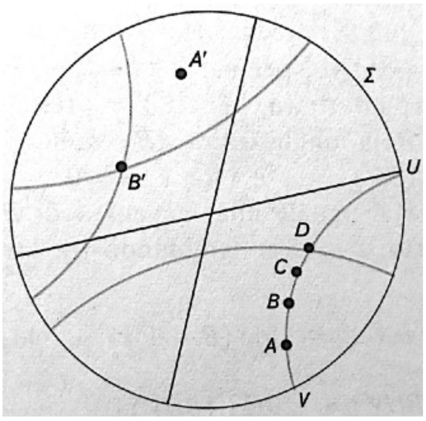
Egli diede contributi originalissimi alla geometria, tra cui l'introduzione di una nuova definizione di rette parallele, nuove figure geometriche come l'oriciclo (cerchio di raggio infinito) e l'orisfera (sfera di raggio infinito), e la considerazione che la geometria immaginaria, in zone di spazio sufficientemente piccole, coincida con la geometria euclidea.

Il matematico ungherese **Janos Bolyai** si occupò a lungo della questione delle parallele, ed estendendo le sue ricerche alla geometria assoluta, arrivò agli stessi risultati di Lobachevskij, descrivendo le nuove proprietà dello spazio non euclideo nell'appendice dell'opera didattica di matematica del padre nel 1832. Tra i contributi che apportò il matematico vi sono i risultati di indipendenza già enunciati di Lobachevskij e la soluzione del problema della quadratura del cerchio nell'ipotesi della falsità del quinto postulato.

Modello di Poincarè

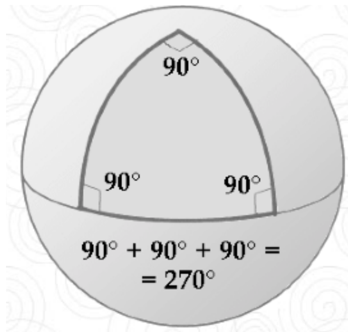
Si propone, per maggior chiarezza, il modello di Poincarè (1854-1912), che presenta un'interpretazione della geometria iperbolica su enti del piano euclideo, ottenendo un modello di geometria iperbolica piana. Si fissa come piano euclideo un cerchio Σ di centro O e raggio *r;* gli enti sono interpretati come segue:

Concetto iperbolico	Interpretazione euclidea
Punto	Punto interno a Σ
Retta	Diametro di Σ o arco di cerchio ortogonale a Σ con estremi su Σ e interno ad esso
Punto appartenente ad una retta	Punto che appartiene in senso euclideo alla retta iperbolica
Lunghezza di un segmento AB	|log (ABUV)|, dove U e V sono i punti di Σ che si trovano sulla retta iperbolica passante per A e B
Segmenti congruenti	Segmenti di uguale lunghezza iperbolica



Con opportuni cambiamenti di qualche altra premessa oltre al postulato della parallela, è possibile ottenere un sistema geometrico che corrisponde all'ipotesi di Saccheri dell'angolo ottuso, dunque all'altra possibile negazione del V postulato euclideo: la non esistenza di rette parallele. La scoperta di questo nuovo sistema si deve al matematico tedesco **Bernhard Riemann** (1826-1866), che in un'opera del 1854 pervenne alla fondazione della geometria sferica ed ellittica.

Le geometrie di Riemann

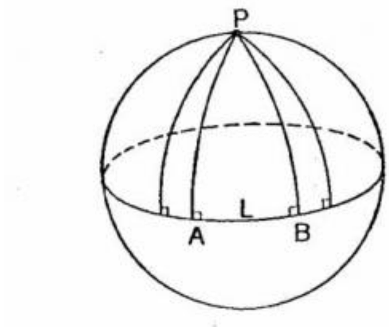


Nella geometria non euclidea introdotta da Riemann vale il seguente postulato, che sostituisce in quinto euclideo:

Data una retta ed un punto non appartenente ad essa, non esiste alcuna retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Ne consegue che due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune: l'ipotesi su cui si basa tale geometria è che lo spazio sia **finito**, in particolare facendo riferimento alla retta che, a differenza dei casi euclideo e iperbolico, si comporta come una linea **chiusa**, avente cioè lunghezza finita pur essendo illimitata (si può continuare a percorrerla senza mai fermarsi).

Dall'introduzione dell'assioma di Riemann si possono ottenere, a seconda delle modifiche apportate agli assiomi, due geometrie: una definita **sferica**, l'altra **ellittica**.



Partendo dall' ipotesi che due rette in un piano hanno sempre almeno un punto in comune e che quindi in un piano non si può condurre una retta parallela ad un'altra, per un punto ad essa esterno, si dimostra che tutte le perpendicolari ad una retta r da una stessa parte di essa passano per un punto P, equidistante da ogni punto di r.

Se si immaginano tutte le rette della parte opposta, si nota che queste si incontrano tutte in un punto P', con le stesse caratteristiche di P.

Sorge il problema della coincidenza o meno di P e P', cui si possono dare due risposte che contraddistinguono due diverse geometrie, comunque strettamente legate tra loro:

- Nella **geometria sferica**, P ed P' non coincidono, sono due punti distinti: due rette si intersecano sempre in una coppia di punti. Questa geometria è assimilabile alla geometria euclidea immaginata sulla sfera, assumendo che le rette siano circonferenze massime di questa.
- Nella **geometria ellittica**, P ed P' coincidono: due rette si incontrano in un solo punto e due punti distinti individuano una sola retta.

La geometria sferica

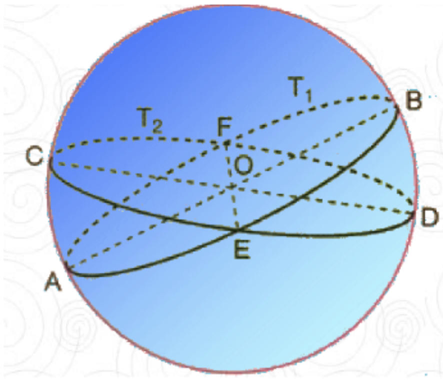
Si divide l'insieme dei punti del piano in coppie di punti, tali che ogni punto appartiene ad una sola coppia e i punti di ciascuna coppia sono distinti. Per due punti appartenenti a coppie distinte passa una sola retta, mentre per i due punti di una stessa coppia passano più rette. Si definiscono **antipodali** due punti appartenenti ad una stessa coppia.

In questa geometria le rette sono linee chiuse, due punti antipodali dividono la retta in due parti congruenti, e tutte le rette che passano per un punto dato passano anche per il suo antipodale.
Seguono le principali proprietà di questa geometria:

- due punti antipodali dividono una retta passante per essi in due parti congruenti;
- essendo lo spazio finito, tutte le rette sono finite e congruenti;
- tutte le rette che passano per un punto dato passano anche per il suo antipodale;
- la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180°, determinando un eccesso angolare; la somma tende a 180° quando l'area del triangolo tende a zero; non vale neanche il teorema di Pitagora, ma si avvicina al vero col tendere a zero dell'area del triangolo;
- non esistono triangoli o poligoni simili con aree differenti;
- due rette qualsiasi hanno un' unica perpendicolare in comune.

La geometria sferica può essere intuibile poiché possiede un'immediata interpretazione nella geometria euclidea, possibile tramite la traduzione dei termini della geometria sferica in quelli del suo modello euclideo, come segue:

Concetto della geometria sferica	Interpretazione euclidea
Piano	insieme di punti di una superficie sferica
Punto	punto della superficie sferica
Retta	cerchio massimo della superficie sferica, ottenuta intersecando un piano passante per il centro della sfera con la sfera stessa
Punti antipodali	punti diametralmente opposti sulla superficie sferica
Segmento	Arco di circonferenza massima



In figura, A e B, C e D, E e F punti antipodali

In questo caso, la geometria è costruita sulla superficie tridimensionale di una sfera, ma il tutto può essere generalizzato ad una "superficie ad n dimensioni", che prende il nome di **varietà di Riemann n-dimensionale**. Si parla di "**curvatura**" dello spazio, concetto introdotto inizialmente da Gauss, poiché la varietà di Riemann è una superficie curva; in particolare, la geometria sferica viene chiamata una "varietà di Riemann a curvatura positiva", la geometria euclidea, costruita in un piano, è una geometria a curvatura nulla e la geometria iperbolica è una "varietà di Riemann a curvatura negativa", in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo risulta minore di un angolo piatto.

Dallo spazio matematico allo spazio fisico

A seguito della pubblicazione del saggio di Riemann, si indagò ampiamente sulla possibilità di applicare i nuovi modelli di geometrie agli spazi della fisica, nella speranza di trovare nuove soluzioni a problemi rimasti irrisolti.

La condizione indispensabile per queste ricerche fu l'espressione delle equazioni fondamentali della fisica matematica in una notazione generale, che fosse valida per ogni tipo di spazio, euclideo e non: da queste ricerche nacquero i tensori e il calcolo tensoriale, elaborati da **Gregorio Ricci Curbastro** (1853-1925) e **Tullio Levi-Civita** (1873-1941) verso la fine dell'Ottocento.

Albert Einstein (1879-1955), pochi anni prima della pubblicazione dei *Fondamenti di Relatività Generale,* si servì proprio degli strumenti matematici elaborati da Gauss, Riemann, Levi-Civita e Ricci Curbastro per elaborare una teoria che definiva lo spazio-tempo come un campo a curvatura, per il quale non potevano valere gli assiomi e teoremi della geometria euclidea.

Lo spazio fisico non è euclideo

Se si congiungono la Terra, Venere e Marte con tre segmenti e si misurano gli angoli del triangolo che ha per vertici questi tre pianeti, si scopre che la loro somma risulta maggiore di 180°. Ne consegue che il Sole attribuisce allo spazio circostante una **curvatura positiva**: come prevede la Relatività Generale, le masse modificano il tessuto dello spazio-tempo, curvandolo tanto più la massa è grande. L'astrofisico americano Irwin Shapiro attuò una verifica sperimentale di questa teoria con un radiotelescopio, che inviava ai pianeti un fascio di microonde per riceverle di ritorno dopo un tempo t; sapendo che la distanza è $d = 1/2\, c\, t$, lo scienziato la misurò tra Venere e la Terra da parti opposte rispetto al Sole, ottenendo una misura maggiore di quella prevista dalla geometria euclidea.

Concetto di geodetica

Gauss dimostrò che il concetto di linea retta del piano, ovvero il cammino più breve tra due punti, può essere esteso a superfici qualsiasi: dati su una superficie due punti A e B vi sarà, tra tutti gli archi delle linee della superficie che li uniscono, almeno un arco che determina il cammino minimo. Egli definì gli archi di minima distanza "archi geodetici" e le linee della superficie che li contengono "geodetiche".

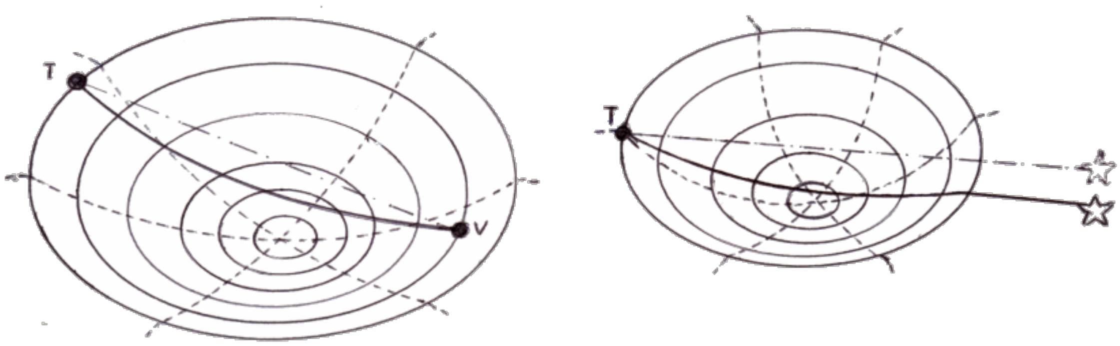
Dunque, se le masse sono in grado di modificare in modo evidente la geometria dello spazio circostante, è chiaro che modifichino anche le geodetiche.

Deflessione della luce

La **deflessione dei raggi di luce** fu teorizzata da Albert Einstein a partire dal famoso Principio di Equivalenza (un sistema accelerato é perfettamente equivalente ad un sistema immerso in un campo gravitazionale) : egli dimostrò che il moto di un raggio di luce immerso in un campo notevolmente accelerato è non più rettilineo, bensì **parabolico**. Essendo un sistema accelerato perfettamente equivalente ad uno gravitazionale, si deduce che la luce “cade” in un campo gravitazionale; tale fenomeno non è osservabile nella realtà quotidiana, infatti servono campi gravitazionali consistenti, come quello del Sole. La verifica sperimentale, operata da Arthur Eddington, si servì proprio di tale campo: lo scienziato dell’Università di Cambridge sfruttò un’ eclissi di Sole totale del 29 maggio 1919, visibile dall’africa Centrale, per poter osservare le stelle in prossimità del disco solare, coperto dalla Luna. Egli misurò le posizioni apparenti di alcune stelle in prossimità del disco solare; le avrebbe poi confrontate con le rispettive posizioni assunte a distanza di alcuni mesi, quando quelle stesse stelle si sarebbero trovate più distanti dal Sole, dunque osservabili di notte. Nonostante la bassa qualità delle misurazioni, lo scienziato dimostrò che la luce delle stelle attorno al disco solare veniva effettivamente deflessa con un angolo stimato di 1",76. Questa fu la prima grande conferma della deflessione della luce, alla base della *Relatività Generale.*

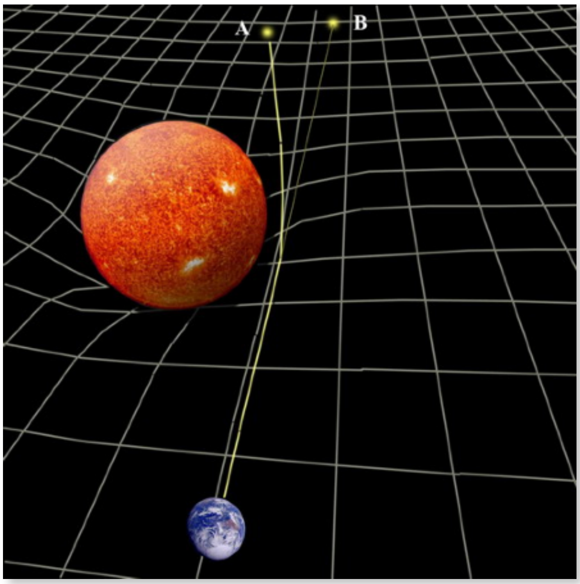
Da una descrizione dinamica ad una geometrica

Il passo successivo della teoria di Einstein fu epocale: la deflessione dei raggi di luce può essere spiegata dalla curvatura dello spazio, causata dalle masse, dunque non sono i raggi che si incurvano, ma lo spazio stesso in cui viaggiano. Normalmente questi procedono in linea retta, poiché nello spazio euclideo che noi percepiamo quotidianamente, la geodetica è una linea retta; nello spazio non euclideo, deformato dalla presenza di grandi masse, i raggi di luce continuano a seguire le geodetiche, le quali, come stabilì Gauss, non sono rette ma curve molto più complesse, come in figura.



Isaac Newton aveva descritto i moti dei corpi nello spazio ipotizzando che tra due masse si eserciti una forza, chiamata **Forza di Gravitazione Universale**, che dipende dall'inverso del quadrato della distanza fra le masse; tale descrizione dello spazio portava a concludere che i pianeti orbitassero intorno al Sole lungo orbite ellittiche.

Einstein sconvolse questo modello: giunse alla stessa conclusione di Newton ma eliminando qualunque interazione reciproca; il pianeta non segue una traiettoria ellittica perché è attratto dal Sole, ma perché quest'ultimo con la sua massa **deforma la geometria** dello spazio-tempo rendendola non euclidea, nella quale la geodetica non è più una linea retta, ma curva. In assenza di forze, secondo il Principio di Inerzia, il pianeta continua a seguire una geodetica dello spazio-tempo: così Albert Einstein geometrizzò la gravitazione universale, trasformando una **descrizione dinamica dell'universo in una esclusivamente geometrica**.



Le equazioni gravitazionali che descrivevano il nuovo modello comparvero in *Fondamenti di Relatività Generale* del 1916: esse descrivevano la nuova **struttura tensoriale** dello spazio-tempo curvo e si basavano sulle ricerche matematiche di Ricci Curbastro, a loro volta risultato dello studio secolare di tutti i matematici che sondarono e approfondirono le geometrie non euclidee.

Un'applicazione tecnologica

Un'eventuale applicazione tecnologica della curvatura dello spazio è evidente se si pensa ai viaggi interstellari: non si dovrebbe accelerare per coprire tali distanze, bensì le si potrebbe direttamente accorciare. Questo risultato potrebbe essere ottenuto generando una **distorsione spazio-temporale** che contraesse lo spazio davanti all'astronave e lo dilatasse dietro.

Un possibile paragone esplicativo è quello della formica sopra un elastico fissato tra due chiodi: normalmente l'insetto, per spostarsi da chiodo a chiodo, dovrebbe camminare per un tragitto equivalente alla lunghezza dell'elastico. Ma, se l'elastico subisse una distorsione, ovvero venisse accorciato davanti alla formica e allungato dietro di essa, l'insetto andrebbe da chiodo a chiodo camminando per un tragitto molto inferiore alla lunghezza complessiva dell'elastico, senza alcuna modifica ad esso.

Un motore in grado di generare una distorsione spazio-temporale viene chiamato **propulsore a curvatura** o **warp drive** (proposto nella saga di Star Trek): esso permetterebbe di coprire distanze interstellari a velocità maggiori di quella della luce, rimanendo però, ad oggi, un'utopia. Tale propulsore è infatti irrealizzabile, sia a causa dell'impossibilità pratica di creare una distorsione spazio-temporale controllata, sia a causa dell'immensa energia necessaria a curvare lo spazio.

Esercizio dimostrativo

Si propone un esercizio che dimostra la deflessione di un raggio di luce che transita accanto al Sole, supponendo che la massa di quest'ultimo agisca per una distanza dell'ordine del suo stesso raggio.

Dati:

g solare = 274 m s^{-2}

r solare= $6,96 \times 10^8$ m

Si calcola il tempo t impiegato dalla luce a percorrere il diametro solare:

$t = 6,96 \times 2 \times 10^8 \text{ m} / 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 4,64 \text{ s}$

Si calcola ora la caduta s della luce nel campo di gravità del Sole:

$s = 1/2\, g\, t^2 = 1/2 \times 274 \text{ m s}^{-2} \times (4,64)^2 \text{ s}^2 = 2,95 \times 10^3 \text{ m}$

Il rapporto tra la deflessione ed il raggio solare definisce l'ordine di grandezza dell'**angolo di deflessione:**

$s/r = 2,95 \times 10^3 \text{ m} / 6,96 \times 10^8 \text{ m} = 4,24\ 10^{-6} \text{ rad} \simeq 0'', 9$

Fonti

- Libro "I problemi della fisica" di John Cutnell, Kenneth Johnson, David Young, Shane Stadler
- Libro "Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria" di Evandro Agazzi e Dario Palladino
- http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/frmset_indice.htm
- http://www.fmboschetto.it
- https://amslaurea.unibo.it/13743/1/Tesi.pdf