Iacopo Paolo Matteo Luzi 5°E a.s. 2019/2020

Spiega il concetto di probabilità in Matematica e in Fisica

Molte situazioni che si presentano tutti i giorni, dalle previsioni del tempo al lancio di un dado, sono caratterizzate dall'incertezza di cosa potrebbe accadere. Il calcolo delle probabilità è la branca della matematica che si occupa di elaborare modelli per descrivere queste situazioni. Gli studi sulla probabilità sono piuttosto recenti rispetto ad altri filoni della matematica infatti è solo a partire dal 1656 che troviamo il primo studio su questo argomento a partire da una richiesta pratica: un giocatore d'azzardo chiamato Cavalier di Mèrè richiese al matematico Blaise Pascal di calcolare le sue probabilità di vincita al gioco dei dadi. Così a partire dalla necessità di vincere soldi al gioco d'azzardo si sviluppò il calcolo delle probabilità, tanto da diventare poi nel novecento la base della teoria fisica della meccanica quantistica.

Parte teorica

Partendo a parlare del calcolo delle probabilità in matematica bisogna dare una serie di definizioni:

- Lo **spazio campionario** (indicato con Ω) è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio cioè casuale
- **Evento** è ogni sottoinsieme di Ω
- **Variabile aleatoria** è una funzione che associa a ogni possibile esito di un esperimento aleatorio un numero reale

A partire da queste definizioni troviamo le prime operazioni possibili di calcolo della probabilità che sono: distribuzioni di una probabilità di una variabile aleatoria discreta (cioè che assume un numero finito di valori). Si chiamo distribuzione di probabilità della variabile X la funzione che associa a ciascuno possibile evento detto x_i, una determinata probabilità p_i.

x_i	x_1	x_2	………	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	………	p_n

Di questa distribuzione di probabilità è possibile trovare poi:

- La **media** $E(x)=\mu= x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$
- La **varianza** $\sigma^2=V(x)= (x_1-\mu)^2 \text{ x } p_1+(x_2-\mu)^2 \text{x } p_2+\ldots\ldots+(x_n-\mu)^2 \text{x } p_n$
- La **deviazione standard** o scarto quadratico medio che si indica con σ è la radice quadrata della varianza

Le distribuzioni di probabilità discrete

Un esempio di distribuzione di probabilità discreta è quella binomiale, o di Bernoulli, nella quale sono possibili solo due esiti: successo e insuccesso. Il processo di Bernoulli consiste invece nella ripetizione di n prove di Bernoulli identiche e indipendenti. A partire da questo possiamo trovare la variabile aleatoria binomiale che conta il numero complessivo di successi ottenuti nel *n* prove del processo. Per trovare la distribuzione di probabilità della variabile si utilizza la formula:

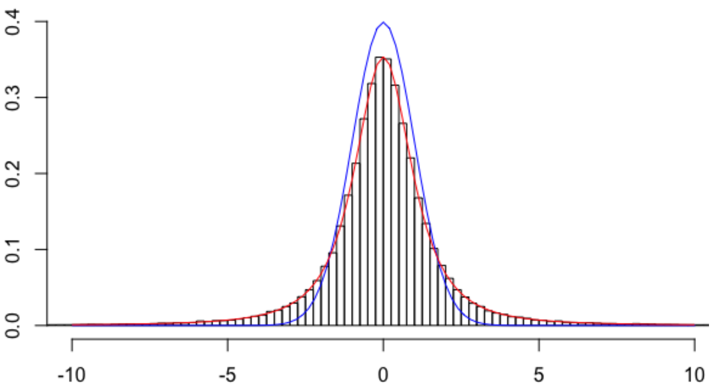
$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$ Con x= 0,1,2…..n,

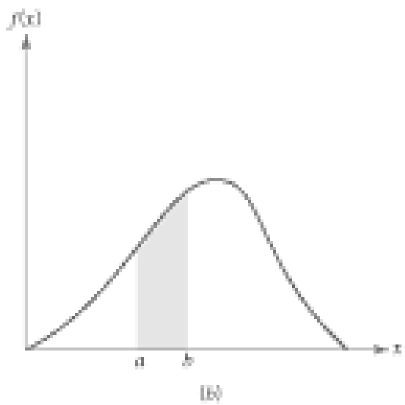
essendo n il numero delle prove e p la probabilità di successo. La media e la varianza sono date dalle seguenti formule:

- E(x)= np
- V(x)= np(1-p)

Le distribuzioni continue

Fin qui abbiamo parlato di variabili discrete cioè variabili che considerano insiemi discreti di numeri cioè di cui di ogni elemento puoi stabilire il precedente ed il successivo mentre da adesso parleremo di variabili continue cioè una variabile che può assumere tutti i valori di un dato intervallo. Sono utilizzate questo tipo di variabili per descrivere grandezze fisiche come la temperatura, la velocità ma anche la l'altezza di una persona. In queste situazioni a causa di inevitabili errori di misurazione è inutile cercare di trovare quale sia la probabilità di ottenere una certa misura quanto più si cerca di trovare la probabilità che la misura assuma i valori di un determinato intervallo.





In questo caso il grafico è inizialmente formato da parallelepipedi rappresentanti i vari intervalli ma, immaginando di ridurre sempre di più l'ampiezza degli intervalli si arriva ad ottenere una linea continua, grafico della funzione reale di variabile reale che rappresenta una distribuzione di probabilità. La probabilità che una variabile X assuma i valori di un intervallo $[a, b]$ si può interpretare come l'area formata dalla funzione, dall'asse x e dalle rette x=a e x=b. Quest'area è data dall'integrale della funzione definito in $[a, b]$.Questa funzione è chiamata densità di probabilità. Le condizioni sono:

- La funzione deve essere non negativa in tutto R: $f(x) \geq 0 \forall x \in R$
- L'integrale della funzione sull'intervallo (-∞,+∞) valga 1:$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

La probabilità che la funzione assuma i valori di un intervallo $[a, b]$è quindi:

$$p(X \in I) = \int_a^b f(x)dx$$

Di conseguenza la probabilità che la funzione assuma un determinato valore è uguale a zero.

$$p(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Come nelle distribuzioni di variabili discrete possiamo trovare:

- Media=μ=E(x)= $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- Varianza=σ^2=V(x)= $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^{\wedge}2f(x)dx$
- Deviazione standard=σ=$\sqrt{V(x)}$

Viene definita invece ripartizione la funzione: F(x)=p(X≤ x)= $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

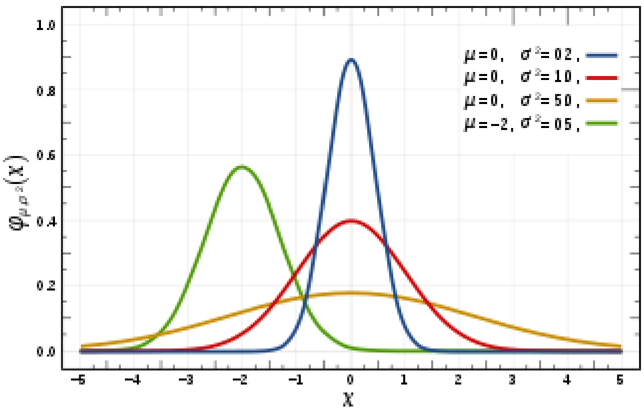
La distribuzione normale (o gaussiana)

Una variabile aleatoria continua si dice avere distribuzione normale di parametri μ e σ^2 se la sua densità di probabilità è la funzione:

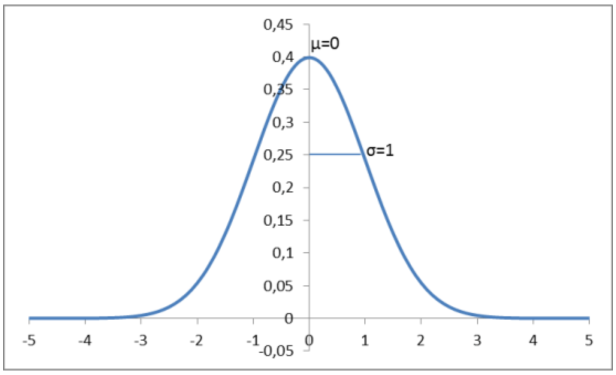
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Il grafico di una funzione gaussiana ha le seguenti caratteristiche:

- È simmetrico rispetto alla retta x=μ
- Presenta un massimo ne punto x=μ
- Presenta due punti di flesso in x=μ±σ
- Ha come asintoto l'asse x
- Quanto più σ è piccolo tanto più il grafico risulta appuntito



La variabile aleatoria normale con μ=0 e σ^2=1 è detta normale standard



Per calcolare la probabilità di una variabile aleatoria Z di una normale standard bisogna basarsi sulla funzione di ripartizione della normale standard chiamata ϕ ed è uguale a:

$$\phi(z) = p(Z \leq z) = p(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Data la complessità dei calcoli per trovare i valori assunti nei vari intervalli si possono ricavare grazie all'utilizzo di software di calcolo o attraverso tabelle già predisposte come questa:

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

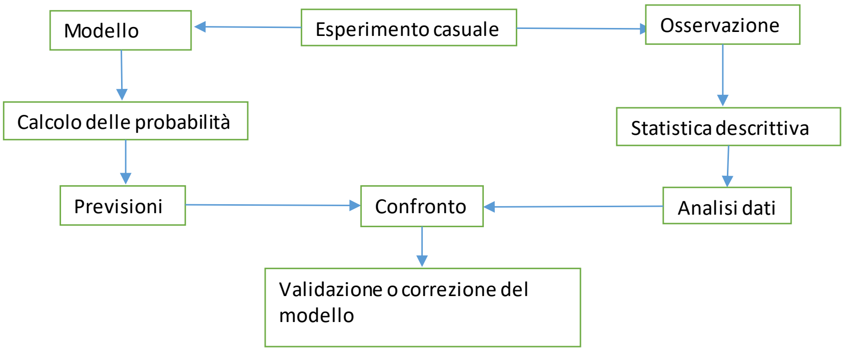
Il calcolo delle probabilità di una variabile aleatoria normale di parametri qualsiasi può essere in ogni caso riportato al calcolo delle probabilità di una normale standard attraverso la formula:

$$p(X \leq x) = p(X < x) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Il concetto di modello matematico

La costruzione di un modello matematico di un fenomeno casuale consiste nel definire alcune variabili aleatorie che descrivono il fenomeno in esame e assegnare a tali variabili aleatorie una distribuzione di probabilità. Questa è la fase più creativa perché comporta un certo grado di arbitrarietà nella scelta della distribuzione più adeguata. Naturalmente, nella costruzione di un modello non si procede arbitrariamente, ma si cerca di esprimere nel miglior modo possibile il fenomeno che si sta studiando. Tuttavia, dopo aver trovato un modello che, almeno a priori, sembra ragionevole, esso dovrà essere "messo alla prova", confrontando con i dati empirici le previsioni che consente di effettuare. Nel caso si riscontrino significative discrepanze con i dati reali, occorre cercare di modificare il modello per renderlo più aderente alla realtà; nel caso in cui, invece, si abbia trovato un buon modello, non è tuttavia detto che questo sia l'unico necessario o che non sia migliorabile. Iniziamo quindi ad intravedere la moderna concezione di modello matematico come rappresentazione formale di un modello, che non pretende di spiegarlo o scoprirne l'intima essenza, ma solo di darne un'immagine che descriva bene alcuni suoi aspetti. Questo è un aspetto opposto rispetto alla fisica classica: Newton aveva come obiettivo la verità della ricerca e non la sua utilità, dalla spiegazione del fenomeno fino alla sua causa prima. La fisica classica, e non solo, infatti si basa sul principio del determinismo, secondo cui, ad esempio, la conoscenza della posizione e della velocità di un punto materiale, nonché la legge del suo moto, determinano in modo univoco la sua posizione. A rovesciare questo principio fu la teorizzazione del "Principio di indeterminazione" da parte di Werner Heisenberg nel 1927.

Per spiegare meglio questo nuovo metodo di indagine scientifica cito una frase di John von Neumann: "Le scienze non cercano di spiegare, a malapena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto modelli. Per modello si intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto che ci si aspetti che funzioni, cioè che descriva correttamente i fenomeni di un'area ragionevolmente ampia."



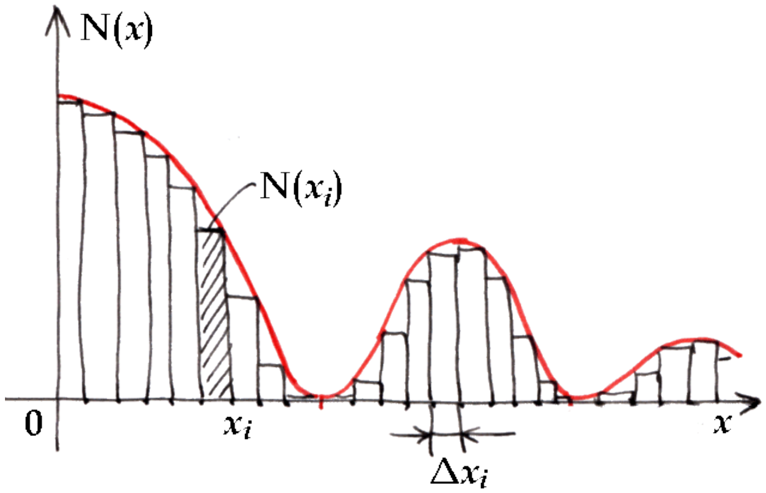
La modellizzazione della probabilità nella meccanica quantistica

Le onde di probabilità

Nel 1923 il fisico francese Luis de Broglie avanzò la sorprendente ipotesi che le particelle materiali possano manifestare un comportamento ondulatorio e che ad esse possa essere associata una funzione d'onda data da: $\lambda = \frac{h}{p}$ in cui p è la quantità di moto relativistica mentre h è la costante di Planck. Questa ipotesi venne poi confermata dall'esperimento di Davisson e Germer, da quello di George P. Thompson.

Ma l'equazione di de Broglie non permette di capire di che tipo sia l'equazione associata alla particella materiale; per cercare di capirlo bisogna utilizzare l'esperienza di Davisson e Germer. Max Born ebbe l'idea di riprodurre l'esperimento utilizzando un singolo elettone miliardi di volte al posto di un fascio. Al di là della fenditura allora non osserveremo una figura di diffrazione, come sarebbe stato se avesse avuto ragione Schrödinger circa la natura puramente ondulatoria dell'elettrone, bensì una singola traccia. Essa però non compare esattamente al di là della fenditura, bensì in un punto qualsiasi che cambia per ogni elettrone. Partendo da ciò consideriamo le onde associate alle particelle come onde di probabilità, il cui valore in un determinato punto dello spazio fornisce un'indicazione della probabilità di trovare la particella in tale punto. La probabilità associata alle particelle è proporzionale al modulo della funzione d'onda chiamata Ψ:

$$p(x_i) \propto |\Psi(x_i, t)|^2 \qquad \text{e} \qquad p(x_i) = \lim_{N \to +\infty} \frac{N(x_i)}{N}$$



Questo è il risultato che otterremmo tabulando, attraverso dei rivelatori, le posizioni di arrivo di ogni elettrone e si può notare come il risultato sia infine una figura di diffrazione: il risultato è uguale a quello che si sarebbe ottenuto utilizzando un fascio di elettroni! Le zone in cui la probabilità è più alta corrispondono alle frange chiare mentre dove è bassa a quelle scure.

Allo stesso tempo vediamo anche che questo grafico è una distribuzione di probabilità, allora entrano in campo gli strumenti matematici già presentati. Prima di tutto dobbiamo considerare la variabile aleatoria della funzione, N(x_i), come una densità di probabilità. Supponendo di dividere in infinite celle lo schermo di spessore dx, allora la probabilità che il neutrone colpisca lo schermo in un intervallo x+Δx è infinitesima anch'essa detta dp(x). Allora otterremo che:

$$\mathrm{d}p(x) = |\Psi(x,t)|^{2} dx \qquad \text{da cui} \qquad |\Psi(x,t)|^{2} = \frac{dp(x)}{dx}$$

Il modulo quadrato della funzione d'onda rappresenta dunque una grandezza probabilistica: per questo, distribuzione di probabilità e figura di diffrazione vengono a coincidere. Analogamente a tutte le densità di probabilità la funzione d'onda ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad => \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^{2} dx = 1$$

Il principio di sovrapposizione

La funzione d'onda Ψ, come i corpi in moto obbediscono al secondo principio della dinamica, obbedisce ad un'equazione chiamata equazione di Schrödinger che permette di studiarne il comportamento ma, essendo quest'equazione lineare, presenta un'altra proprietà che può essere descritta dal principio di sovrapposizione:

Se un certo sistema quantistico può trovarsi in due possibili stati, descritti rispettivamente da due funzioni d'onda Ψa e Ψb, allora esso può trovarsi anche in uno stato descritto da una combinazione lineare delle due funzioni d'onda: $\Psi = a\Psi_a + b\Psi_b$

Per capire l'evoluzione portata da questo principio consideriamo un sistema costituito da un elettrone emesso da una sorgente di luce, da uno schermo opaco in cui sono presenti due fenditure A e B e da un rivelatore posto al di là dello schermo. Un elettrone che giunge sul rivelatore può essere descritto da due funzioni d'onda: Ψa descrive l'elettrone che è passato dalla fenditura A, mentre Ψb descrive quello che è passato dalla fenditura B. Max Born fu il primo a spiegare questa situazione: immaginando di inserire due rivelatori ciascuno davanti ad una fenditura. Lasciando passare abbastanza tempo, questo esperimento finirà per dirci che, su N elettroni che attraversano lo schermo, N_a passano per la fenditura A e $N_b = N - N_a$ passano attraverso la B. Il risultato di ogni singola misurazione non è in alcun modo prevedibile a priori, e si possono conoscere solo le due probabilità che l'elettrone passi rispettivamente attraverso la prima o la seconda fenditura.

Queste probabilità sono date dalle formule: $p_a = \frac{N_a}{N}$ e $p_b = \frac{N_b}{N}$

Queste probabilità possono essere trovate attraverso l'uso dei coefficienti **a** e **b** con le formule:

$$p_a = \frac{a^2}{b^2 + a^2} \quad e \qquad p_b = \frac{b^2}{b^2 + a^2}$$

Quando si esegue questo tipo di osservazione, l'elettrone è certamente passato per una fenditura determinata, e quindi non è più descritto dallo stato Ψa + Ψb ma da uno dei due stati Ψa e Ψb, a seconda della fenditura da cui è passato. Ora, secondo l'interpretazione di Copenaghen, si dice che l'atto di compiere una misura (nel nostro caso il segnale avvertito da uno dei due rilevatori Ra o Rb) fa «collassare» la funzione d'onda dallo stato di sovrapposizione a uno dei due stati di partenza. I coefficienti numerici che compaiono nella combinazione lineare delle due funzioni d'onda determinano le probabilità dei diversi eventi, e quindi del fatto che la funzione d'onda collassi nello stato A piuttosto che nello stato B.

ESERCIZI

1) Si lanciano due dadi da gioco regolari a sei facce. Sia X la variabile aleatoria che esprima la somma dei due numeri ottenuti. Determina:

a) La distribuzione di probabilità di X;
b) La media di X
c) La varianza e la deviazione standard di X

a) $X = d_1 + d_2$

D_1/D_2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

b) $E(x)=\mu= x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=1/18+1/6+1/3+5/6+7/6+10/9+1+5/6+1/3+1/6+1/18= 7$

c) $\sigma^2=V(x)= (x_1-\mu)^2 \text{ x } p_1+(x_2-\mu)^2 \text{x } p_2+\ldots..+(x_n-\mu)^2\text{x } p_n= 25/36+8/9+3/4+4/9+5/36+5/36 +4/9+3/4+8/9+25/36= 35/6$

$\sigma=\sqrt{\frac{35}{6}}$

2) Il tempo di vita X, espresso in ore, di un dato tipo di pile è una variabile aleatoria di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{150}{x^2} & x \geq 150 \\ 0 & x < 150 \end{cases}$$

Calcola la probabilità che una pila di questo tipo debba essere sostituita entro le 200 ore di attività.

Verifico le condizioni che la rendono una densità di probabilità:

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in R \ e \quad \int_{-\infty}^{150} 0dx + \int_{150}^{+\infty} \frac{150}{x^2} dx = 0 - [-1] = 1$$

Le condizioni sono verificate

Passiamo a trovare: $f(150 < x < 200) = \int_{150}^{200} \frac{150}{x^2} dx = \left[-\frac{150}{x}\right]_{150}^{200} = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

3) Un milione di elettroni viene inviato verso uno schermo nel quale sono aperte due fenditure **A** e **B**; gli elettroni sono inviati uno alla volta. Ogni elettrone è descritto dalla funzione d'onda:

$$\boldsymbol{\Psi = 3\,\Psi_A + 5\,\Psi_B}$$

Allora le probabilità che gli elettroni passino attraverso le due fenditure sono rispettivamente pari a:

$$\mathbf{p_A = \frac{3^2}{3^2 + 5^2} = \frac{9}{34} = 0{,}265}$$

$$\mathbf{p_B = \frac{5^2}{3^2 + 5^2} = \frac{25}{34} = 0{,}735}$$

e quindi possiamo stimare che **0,265 x 1.000.000 = 265.000** elettroni passeranno attraverso la fenditura **A** e **0,735 x 1.000.000 = 735.000** attraverso la fenditura **B**.

Bibliografia e sitografia

http://progettomatematica.dm.unibo.it/Combinatoria/intro1.htm

http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/3definiz.html

http://www.fmboschetto.it/tde5/quant5.htm

http://www.sagredo.eu/varie/probabil.pdf

http://static.gest.unipd.it/~livio/PDF/Le%20principali%20distribuzioni%20di%20probabilita'.pdf

http://www.sapere.it/sapere/strumenti/studiafacile/fisica/La-fisica-moderna/La-meccanica-quantistica-e-l-atomo/Onde-di-probabilit-.html

http://www3.med.unipmn.it/~magnani/pdf/biotech_2009_4B_distribuzione_gaussiana.pdf

"La matematica a colori, Edizione blu" Leonardo Sasso

"I problemi della fisica" John D. Cutnell, Kenneth W. Johnson, David Young, Shane Stadler