

## Dante e l'Empireo riemanniano

In questo nostro scritto ci proponiamo di evidenziare una “strana” coincidenza tra la descrizione dell'Empireo che Dante ci mostra con mirabili versi nel Canto XXVIII del Paradiso e i risultati delle “nuove” geometrie non euclidee che furono elaborate nel secondo '800.

Nello specifico il paragone sarà fra i versi danteschi e l'ipersfera riemanniana che sembra veramente riecheggiare i termini della visione del poeta dopo un lasso di tempo di sei secoli. (1)

Non proporremo qui - ovviamente - un'improbabile, se non impossibile influenza di Dante su Riemann limitandoci, invece, ad evidenziare analogie e similitudini.

Non rinunceremo però a chiederci se questa consonanza derivi dalla sublime capacità di un poeta d'intuire una sorta di “poesia matematica dell'universo” oppure dal fatto che per un uomo colto del '300 il pensare lo spazio non euclideo non fosse per nulla qualcosa di anomalo o quantomeno poco intuitivo bensì cosa non strana se non addirittura usuale.

A tale scopo cercheremo anzitutto di familiare il lettore con le geometrie non euclidee ed in special modo con l'ellittica riemanniana, per poi cercare d'instaurare un gioco di controcanto fra i versi del poeta e le astrazioni del matematico.

Valuteremo poi se nel corso della “Rivoluzione scientifica” che ha prodotto i fondamenti epistemologici per le scoperte della scienza moderna, alcune capacità immaginative legate a determinati modelli di pensiero non siano state dimenticate con la conseguente perdita, seppur temporanea, di certi schemi mentali euristicamente validi.

Per giungere ad un concetto così poco intuitivo come l'ipersfera riemanniana conviene prendere il problema un po' da lontano e rifarsi a quei problemi che per secoli hanno tormentato i cartografi e che si legano indissolubilmente al problema di rappresentare su di una superficie piatta uno spazio curvo.

Infatti, La maggiore difficoltà di chi voglia rappresentare su di un piano - per esempio una pianta topografica -, uno spazio curvo sta nel fatto che è impossibile raffigurare grandi spazi su di un piano in modo che punti vicini sulla superficie terrestre siano sempre vicini tra loro sulla carta.

Facciamo un esempio: se il rappresentare una pianta viaria di una città non presenta grandi problemi a causa della bassa curvatura terrestre, rappresentare la posizione di città molto distanti tra loro come ad esempio Roma e Oslo è cosa ben diversa.

Il fatto che esse debbono avere latitudine e longitudine specifiche produce un'evidente distorsione nella rappresentazione grafica. Se la precisione dei gradi è rispettata allora esse appaiono in posizioni distorte rispetto alla realtà.

Il più grande geografo dell'antichità - Mercatore - che partiva dall'ovvio ragionamento che una carta nautica deve dare una rappresentazione assolutamente fedele della posizione secondo latitudine e longitudine, scelse acutamente di aumentare progressivamente la distanza fra i paralleli verso ciascun polo in proporzione dell'allontanamento rispetto all'equatore. (Figura 1)

Semplificando è come avvolgere la sfera terrestre con un centro luminoso in un cilindro di carta. La lampada luminosa proietterà sul cilindro la sfera e le ombre dei vari continenti: ogni meridiano formerà sul cilindro una linea verticale e ogni parallelo una orizzontale.

Tagliando poi il cilindro su uno dei meridiani si avrà una carta simile alla proiezione di Mercatore

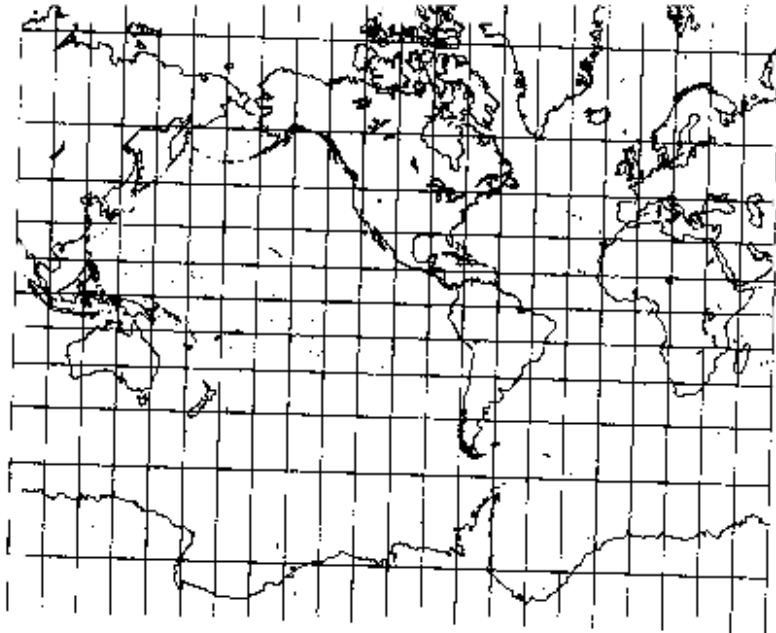


figura 1

ma in cui solo le direzioni nord-sud ed est-ovest sarebbero rappresentate esatte, mentre le regioni vicine ai poli appariranno sulla carta più grandi di una regione d'eguali dimensioni situata però vicino all'equatore; in più la distorsione verso i poli apparirebbe ulteriormente aumentata rispetto a Mercatore. (Figura 2)

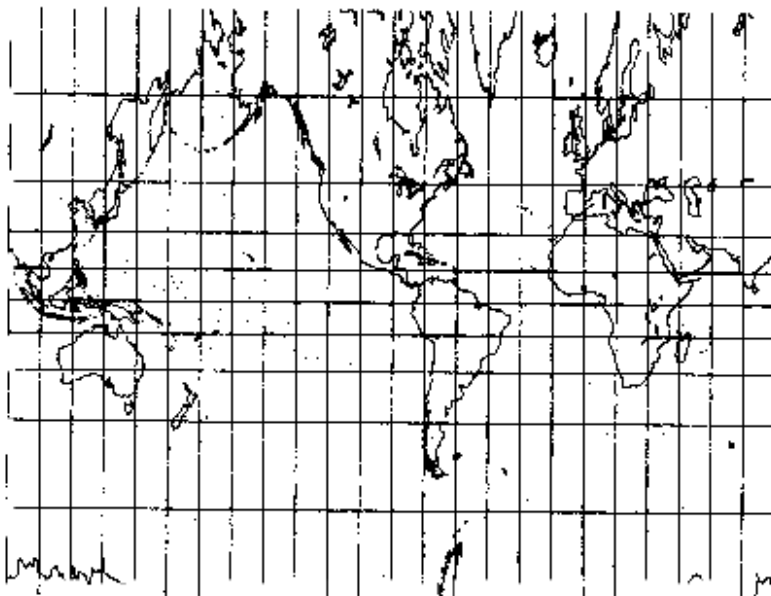


Figura 2

L'analogia dà però una discreta idea di una carta di Mercatore e fa soprattutto capire la difficoltà di rappresentare una superficie sferica su di un piano. Ma le difficoltà non finiscono qui. La proiezione di una sfera su di un piano comporta necessariamente l'uso di due semisfere, ad esempio una per quello boreale e una per quello australe

con l'ulteriore problema che, ad esempio, località vicinissime sull'equatore sarebbero assai distanti sulla carta. Anche i tentativi di usare forme ellittiche per riunire in un unico disegno i due emisferi incontrano altri problemi come nella carta Hammer - di seguito riportata - risalente al 1862. (Figura 3)

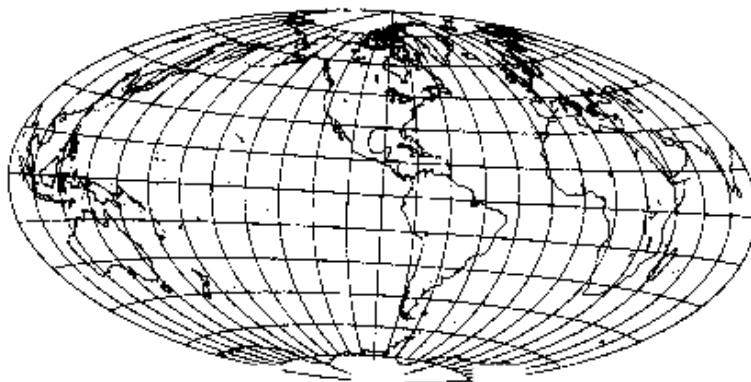


Figura 3

Le difficoltà elencate furono poi dimostrate insolubili dal grande matematico Eulero che chiarì in modo conclusivo che non esiste alcuna carta della superficie terrestre che trasportata su di un foglio piano abbia una scala fissa: ogni tentativo di proiezione è in realtà un compromesso.

Ogni carta nautica va quindi interpretata concettualmente da colui che la legge.

Ma non esistono solo carte nautiche, altre come la carta equidistante azimutale d'Al-Biruni, teorizzata intorno al mille, sono assai comode per la moderna navigazione aerea.

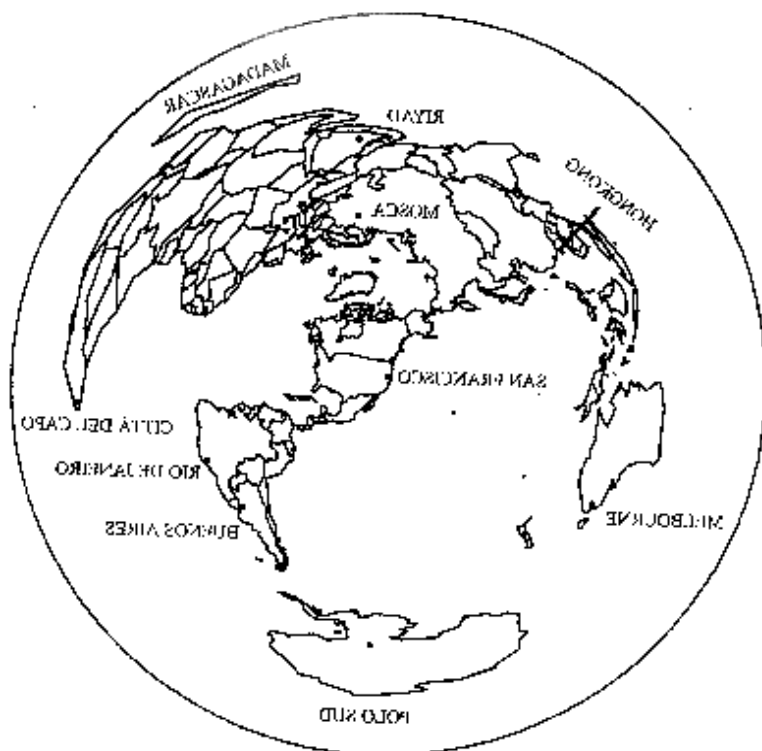


figura 4

Questa carta nota anche come egocentrica (figura 4) - perché incentrata su di una località presa arbitrariamente che è collocata al centro - permette di rappresentare con grande precisione la regione attorno al punto centrale e di fornire un modo immediato

per determinare la distanza di quel punto da qualsiasi altro punto sulla sfera semplicemente misurando la distanza sul foglio e moltiplicandola per il fattore di scala. Non solo in una carta come questa il cerchio esterno rappresenta in realtà un unico punto cioè l'esatto opposto del punto centrale della nostra carta - il nostro ego-centro. Il punto a noi opposto e la circonferenza massima di tale carta sono dunque la stessa cosa.

Inoltre tale linea retta mostrerà quali località si sorvoleranno volando in linea retta dalla posizione scelta come centrale all'altra.

Ovviamente in una simile carta le distorsioni aumenteranno tanto più ci si allontana dal centro. La ragione risiede nel fatto che ogni parallelo della sfera si traduce in un cerchio all'interno della carta, cerchio che diviene massimo in corrispondenza al polo opposto a quello appoggiato sul foglio, come nella figura seguente:

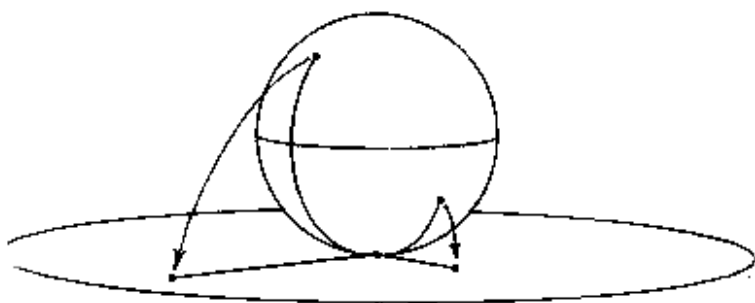


figura 5

Ma come effettuare esattamente le misurazioni riguardanti le distanze?

Ancora una volta per piccole porzioni di superficie ciò non è un problema ma se si volesse ad esempio misurare la lunghezza di un meridiano?

Ciò, come è noto - è stata fatta già nell'antichità per l'equatore da Eratostene, attraverso una tecnica trigonometrica, e successivamente da un progetto voluto dal Califfo al-Mamun fra l'813 e '833 con risultati di discreta soddisfazione.

In epoca moderna però si era arrivati ad un metodo assai preciso.

Il sistema, anche se lungo e laborioso, consiste nello studio teorico dei rilievi topografici su larga scala ovvero della geodesia. Il procedimento chiave che si usa in geodesia è la triangolazione. Per realizzarla si scelgono alcuni punti rilevanti e facilmente riconoscibili del paesaggio e si misura la distanza fra coppie diverse dei punti di riferimento.

Tutta la regione viene così ad essere ricoperta da una serie di triangoli di cui si conoscono precisamente le misure di angoli e lati e dai quali è possibile inferire la distanza in linea d'aria di punti assai distanti.

Fu con questa tecnica che tra il 1792 e il 1799 gli astronomi Pierre Méchain e Jean-Baptiste Delambre misurarono il quarto di meridiano passante da Dunkerque e Barcellona, la cui diecimilionesima parte divenne il Metro - misura da noi usata ancor oggi - e il cui esempio in platino fu depositato con gran pompa presso gli Archivi di Francia il 22 giugno di quell'anno.

Ma il problema non può dirsi esaurito affidandosi ad una geometria puramente sferica perché la terra è in realtà un ellissoide che misura Km 40.000 passando per i poli ma Km 40.067 passando per l'equatore.

In realtà il processo di misurazione non è però falsato purché la distanza in linea d'aria sia la più breve possibile: in un piano essa sarà una retta ma su di una superficie sferica sarà un cerchio massimo. In altre parole qualsiasi sia la superficie in questione il tratto

più breve tra due punti sarà una geodetica e la geodetica può prendere forme diverse - come abbiamo visto - secondo la superficie o meglio della curvatura della superficie. Il concetto di curvatura positiva o negativa è fondamentale per il nostro discorso e merita un ulteriore approfondimento.

In un piano una geodetica come abbiamo detto è una retta e la triangolazione in un piano è fatta di triangoli euclidei che per definizione hanno tre angoli la cui misura degli angoli interni è pari a 180 gradi.

Ma cosa accade se la triangolazione è fatta su di una superficie curva? Possono verificarsi due casi possibili: che la somma degli angoli interni dei triangoli risultati sia superiore a 180 gradi (superficie sferica o ellittica) o inferiore a 180 gradi (superficie iperbolica).

La cosa può risultare non facile da intuire perciò proviamo a visualizzare:

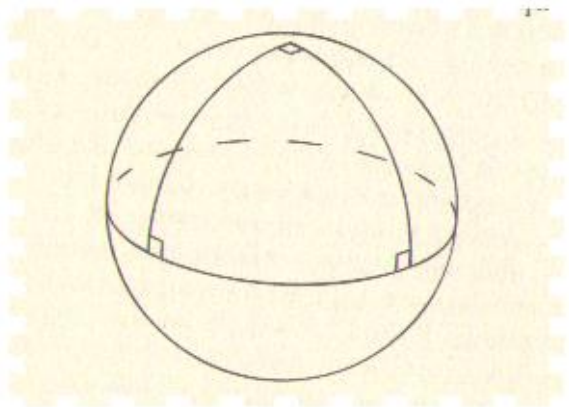


figura 6

E' subito evidente che la somma interna degli angoli in questione supera i 180 gradi e se poi aumentassimo lo "spicchio" fino a comprendere  $\frac{1}{4}$  della semicalotta otterremmo un triangolo i cui tre angoli sino uguali a tre retti e che risulterebbe inoltre l'unico triangolo equilatero possibile.

Una superficie in cui la somma degli angoli supera i 180 gradi si definisce quindi a curvatura positiva, quando gli angoli misurano due retti la superficie è a curvatura nulla (la classica superficie euclidea), se poi gli angoli del triangolo sono inferiori a due retti la curvatura della superficie è negativa.

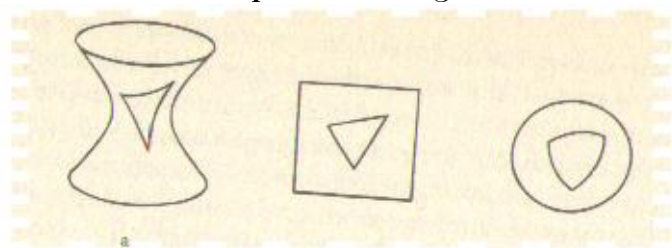


figura 7

Le tre figure superiori ci aiutano a visualizzare e rappresentano rispettivamente una superficie a curvatura negativa, una a curvatura nulla e una a curvatura positiva.

Inoltre - viene da chiedersi - cosa possiamo dire di una circonferenza nei casi sopra descritti?

Nel caso di  $2\pi r$  la circonferenza coinciderà con una curvatura nulla ma quando la circonferenza scende al di sotto di quel valore ci troviamo di fronte a curvatura positiva che diviene sempre più positiva a mano a mano che diminuisce il valore chiave. Al contrario se la circonferenza cresce sopra i  $2\pi r$  la curvatura sarà sempre più negativa come ben esplicano le sottostanti figure.



figura 8

In altre parole la misura della circonferenza può considerarsi determinante per l'attribuzione della curvatura.

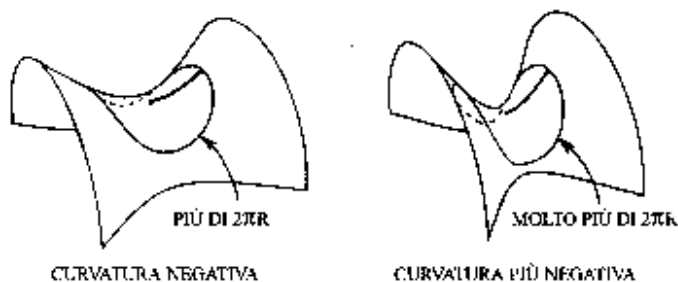


figura 9

La cosa è ancora più eclatante nella sfera se la rovesciamo come un guanto. La figura che otteniamo, che ha nome pseudosfera, non solo ha curvatura negativa, ma addirittura una curvatura negativa costante, come appare ovvio dalla sua similitudine con una tromba allungata.



Figura 31. Due vedute di una pseudosfera

figura 10

Fin quando si rimase comunque all'interno di modelli euclidei, o sferici tutto filò bene; il vero guaio fu di fronte alla possibilità di geometrie non euclidee, geometrie nelle quali fu presentata una realtà completamente alternativa a quella euclidea.

Certo gli *Elementi* di Euclide avevano rappresentato la geometria per oltre duemila anni e non avevano mai incontrato seri motivi per essere messi in discussione tanto da essere considerati da Kant come intuizioni a-priori della mente umana, ma la reazione provocata dal loro apparire fu indignata e quasi violenta.

Stranamente quando nel 1829 il matematico russo Nicolaj Ivanovic Lobacevskij la presentò con grande rigore logico definendola "immaginaria", non perché la ritenesse puramente ipotetica ma perché nella sua formulazione non poteva fare a meno d'introdurre numeri immaginari essa suscitò reazioni vivacissime anche se non si tratta che di una geometria perfettamente reale di una particolare superficie. Fu solo nel 1868 che il matematico italiano Beltrami dimostrò che la geometria di Lobaeskiy è

altrettanto coerente della geometria euclidea e che i matematici cominciarono a pensare alle implicazioni di una geometria non euclidea del mondo reale.

Colui che realizzò a pieno questo passaggio fu il tedesco Georg Friederich Bernhard Riemann.

Nato nel 1826 nel paesino di Breselenz nel Ducato di Hannover. Chiamato ad insegnare a Gottinga, occupando la cattedra che era stata di Gaus, di cui occupò anche l'alloggio presso l'osservatorio, si diversificò dall'illustre predecessore per l'esiguo numero di pubblicazioni.

Eppure i suoi pochi scritti ebbero l'effetto di cambiare non solo il corso della matematica ma il nostro approccio stesso alle strutture dello spazio. La sua originale visione del mondo, frutto com'è di una mente creativa ed originale ha permesso di pensare non soltanto la geometria teoretica, ma soprattutto la fisica in modo totalmente nuovo e apportatore di innumerevoli possibilità.

Come ha scritto di lui Einstein: " Soltanto il genio di Riemann, solitario e incompreso, era già pervenuto alla metà del secolo scorso ad una nuova concezione dello spazio, nella quale questo era privato della sua rigidità, e gli si riconosceva il potere di prendere parte a eventi fisici".

Il suo modo d'affrontare il problema dello spazio, assolutamente puro per i canoni della geometria coincide - nell'esaminare una superficie - con l'esecuzione di precise misurazioni e di registrarle senza mai farsi fuorviare da alcun preconcetto.

Sarà questo atteggiamento a permettergli di non incorrere nell'incidente occorso nel '500 a Saccheri e di farlo giungere all'idea di uno spazio curvo "ellittico" che il pregiudizio euclideo avrebbe dovuto nascondergli.

In breve Riemann non solo inventò l'idea dello spazio curvo, spiegando anche come calcolarne la curvatura ma propose un modello totalmente diverso dal collaudato modello euclideo per l'intero universo. In pratica egli fornì una descrizione dell'universo non solo di forma sferica ma curvatura positiva costante.

Ma andiamo con ordine.

Tutto ruota intorno al "famigerato" quinto postulato di Euclide che implica che per un punto passi una e soltanto una retta parallela ad una retta data.

Nel tentare di sostituire l'assioma delle parallele ci si può muovere in due direzioni opposte: si può dire che in un piano, per un punto fuori di una retta non passa alcuna parallela alla retta data oppure possiamo dire che passa più di una parallela.

Riemann si mosse nella prima direzione Lobacevskij nella seconda.

In sintesi:

tipo di geometria	numero di parallele	somma degli angoli di un triangolo	rapporto della circonferenza al diametro del cerchio	misura della curvatura
Lobacevskij	$\infty$	$< 180^\circ$	$> \pi$	$< 0$
Euclide	1	$180^\circ$	$\pi$	0
Riemann	0	$> 180^\circ$	$< \pi$	$> 0$

Figura 11

Verrebbe spontaneo dire come è possibile che non esistano in un piano due rette parallele?

Proviamo a ritornare alla geometria sferica. Questo modello è costituito semplicemente dalla superficie di una sfera, che consideriamo analoga ad un piano. Ricordiamo che le

linee rette del piano sono sostituite da geodetiche. Sul nostro modello la geodetica è un arco di circonferenza massima. Per spiegarci meglio pensiamo all'equatore e ai meridiani terrestri.

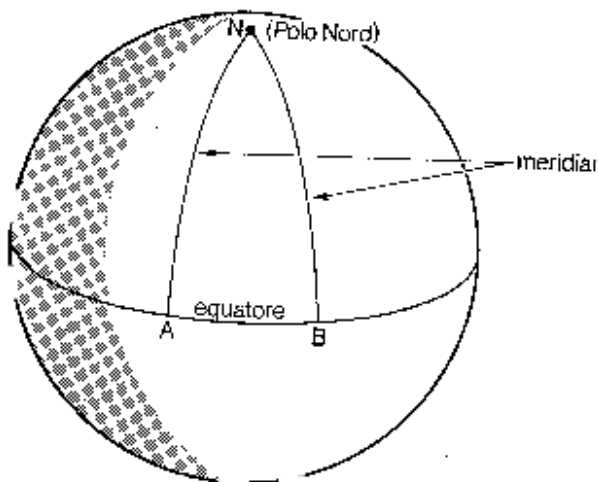


Figura 12

Sulla sfera non esistono due geodetiche o rette parallele che non s'incontrino: abbiamo così un modello facilmente immaginabile di una geometria nella quale non esistono rette parallele. Inoltre riguardo agli angoli interni del triangolo ANB, poiché gli angoli in A e B sono retti, ci troviamo di fronte ad un triangolo la cui somma interna è più di 180 gradi, ovvero ad una figura con curvatura positiva.

Il nostro modello sferico inoltre ci permetterà di comprendere facilmente che la circonferenza di un cerchio al suo diametro è sempre minore di  $\pi$  greco come si evince chiaramente dalla figura 13.

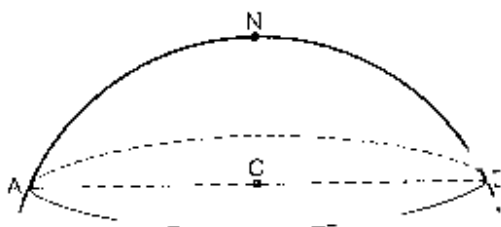


Figura 13

In essa il raggio non è il segmento BC ma la geodetica BN ed il diametro l'arco ANB. Poiché la circonferenza del cerchio è  $\pi$  greco e l'arco ANB è più lungo di ACB è chiaro che il rapporto della circonferenza con ANB (diametro della circonferenza sul piano riemanniano) deve essere minore di  $\pi$  greco.

Nel piano di Lobaceskij si verifica esattamente l'opposto il rapporto della circonferenza con il diametro deve essere maggiore di  $\pi$  greco.

In questo modello detto spazio a sella e che assomiglia ad un passo tra due montagne A è la cima di una montagna, C è il passo e B l'altra montagna. La circonferenza in questo caso è data dalla linea curva DEFGD in quanto tutti i suoi punti sono equidistanti da C, mentre il piano è rappresentato dalla porzione a sella che comprende i punti C, D, E, F, G. E' abbastanza evidente che la circonferenza suddetta è maggiore di quella sul piano con raggio CD. Il rapporto di questa circonferenza al suo diametro FCD deve essere maggiore di  $\pi$  greco.



Conseguenza finale è chela figura 13 ha una curvatura positiva e quella 14 costantemente negativa.

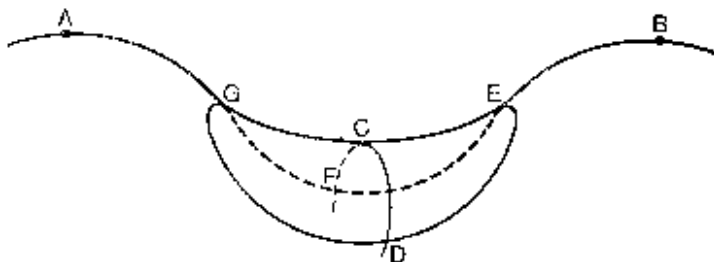


Figura 14

E' bene a questo punto ribadire che la nozione di curvatura dello spazio dovrebbe essere intesa come una descrizione del modo in cui le distanze misurate si discostano da quelle che si avrebbero se lo spazio fosse euclideo.

Sulla curvatura dello spazio sono, infatti, possibili due facili fraintendimenti.

Il primo è che la curvatura sia un concetto qualitativo in contrasto con la piatezza. Mentre è un concetto quantitativo e preciso che assegna ad ogni punto dello spazio e ad ogni sua direzione un valore numerico preciso, determinato dalla forma dello spazio in prossimità di quella posizione.

Il secondo è che per raffigurarsi lo spazio curvo lo si debba pensare incurvato nella quarta dimensione, ciò è vero solo per chi sia in grado di visualizzare uno spazio euclideo quadridimensionale; per gli altri ciò genera solo confusione e quello che importa è che la "curvatura" misura il grado e il tipo di deviazione dal modello euclideo.

Inoltre risulta chiaro che l'usare la geometria piana per misurare l'universo non è una scelta che possa dipendere, esplicitamente o implicitamente, dalla nostra nozione intuitiva di spazio, legata a questa o a quella geometria, ma è l'esperienza, ovvero le osservazioni astronomiche che può confermarci o no le nostre supposizioni. (2)

In altre parole con la scoperta delle geometrie non euclidee diviene ovvio che non esistono mezzi a priori per decidere dal punto di vista della logica o della matematica quale tipo di geometria deve essere usata per rappresentare le relazioni spaziali fra i corpi fisici: da ciò la necessità di affidarsi all'esperienza per vedere se il problema può essere risolto a posteriori.

Concezione geometrica e spazio fisico perdono quella inscindibilità che li aveva sempre connaturati in quanto, come detto, dal punto di vista logico-matematico a nessun sistema può essere assegnato uno *status* privilegiato. Non solo una grandezza geometrica pluri-estesa non è la stessa cosa di uno spazio pluriesteso. Quest'ultimo è solo un caso particolare della prima. "Ne consegue che i teoremi di geometria non si possono derivare da concetti generali di grandezza, ma al contrario, le proprietà per cui lo spazio si distingue dalle altre pensabili grandezze tri-estese si possono ricavare solo dall'esperienza". (3)

Lo spazio fisico insomma dipende dalla natura e non si lascia decidere attraverso concezioni logiche. Come afferma Gaus: "Secondo la mia più profonda convinzione la dottrina dello spazio occupa rispetto alla nostra conoscenza a priori un posto del tutto diverso da quello della teoria pura delle grandezze; infatti, manca del tutto alla nostra conoscenza quella completa convinzione della sua necessità (e quindi anche della sua assoluta verità), che è propria della teoria pura delle grandezze; dobbiamo umilmente riconoscere che mentre il numero è un mero prodotto del nostro spirito, lo

spazio ha una realtà anche al di fuori del nostro spirito, e le sue leggi noi non le possiamo prescrivere interamente a priori". (4)

Lo spazio prende così vari possibili aspetti: può essere a curvatura nulla, positiva, negativa ma anche a curvatura costante o variabile. Sarà la fisica, sulla base delle osservazioni a dover decidere quale possibilità si adatti meglio alla realtà o più esattamente alla teoria che in quel momento sia in grado di dare l'immagine più plausibile della realtà.

In questo contesto Riemann non solo inventò l'idea dello spazio curvo in tutte le sue possibili forme ma propose per l'intero universo un modello radicalmente diverso dall'usuale euclideo cercando anche di calcolarne la curvatura.

L'ipotesi Riemanniana trovò il suo riscontro fisico in seguito proprio nella scelta einsteiniana che elaborando le teorie del matematico arrivò nella teoria della gravitazione a porre in relazione la struttura metrica in ogni punto del continuo spazio-tempo col tensore massa-energia dalle equazioni di campo "in modo tale che la struttura metrica dello spazio, la sua curvatura, risulta dipendere funzionalmente dalla distribuzione della massa energia". (5).

Ma in pratica qual è la posizione di Riemann? L'autore fornisce una descrizione dell'universo che appare come se esso risulti avere la forma di uno "spazio sferico", ossia presenti una curvatura positiva costante.

Per visualizzarlo raffiguriamoci l'universo come quei mappamondi che spesso si trovano appesi nelle aule scolastiche e che rappresentano il globo diviso in due emisferi.

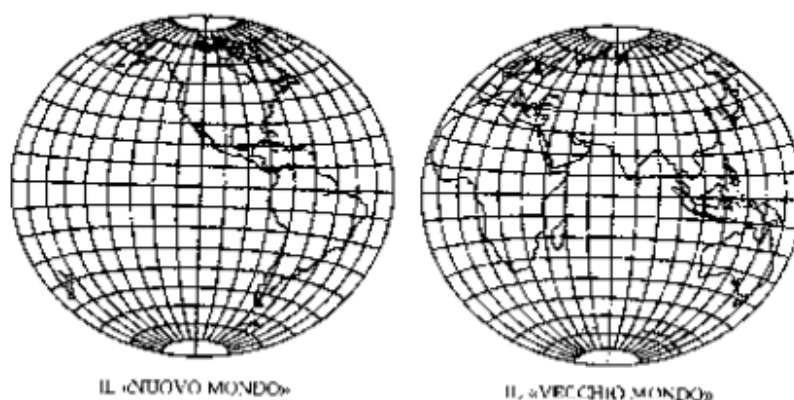


Figura 15

Pensiamo poi la terra (figura 16) come al centro della sfera a sinistra e diciamo che l'interno di tale sfera rappresenti tutto ciò che noi possiamo vedere dell'universo con i nostri telescopi. Immaginiamo poi un'altra civiltà al di là del raggio d'azione dei nostri telescopi situata al centro della sfera di destra che comprende il limite osservativi dei loro telescopi.

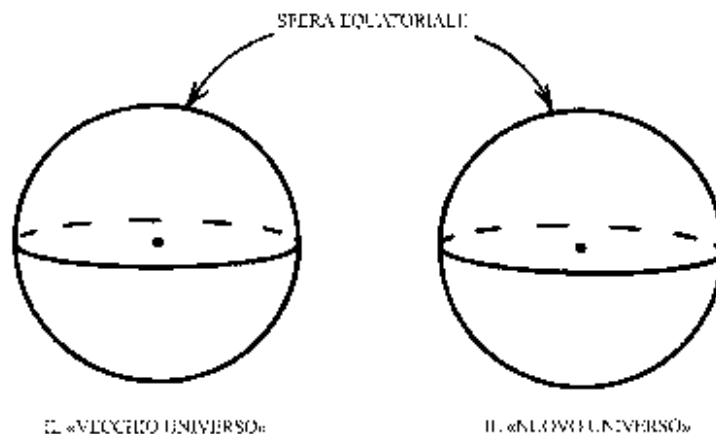


Figura 16

Si potrebbero avere tre possibilità: potrebbero essere completamente separate fra loro da un immenso spazio cosmico e non avere alcuna relazione, potrebbero sovrapporsi in parte con la conseguenza che parti dell'uno potrebbero essere osservate dall'altro, oppure potrebbero essere tangenti e costituire insieme l'intero universo.

**In altre parole l'universo a noi accessibile si troverebbe all'interno di una grande sfera il cui confine esterno potrebbe essere anche il confine esterno opposto dell'altra civiltà.**

Una visione di questo tipo ha anche il pregio di risolvere l'antichissimo problema della finitudine o infinità dell'universo.

Esso come è noto è un vero e proprio tormentone della storia della filosofia.

Una delle soluzioni adottate è stata la distinzione fra infinito potenziale e infinito attuale che porta per esempio Aristotele ad accettare il primo rifiutando il secondo. Quando poi il problema si pone sul piano cosmologico la diatriba diventa veramente feroce. Aristotele, Tolomeo, Copernico optano per un universo finito sulla base dell'insita imperfezione e inintelligibilità di una realtà senza limiti. Aristotele di fronte alla domanda di cosa limiti dall'esterno la sfera cosmica si spinge ad affermare che "la limitazione non è in relazione a qualcosa" (6)

Lucrezio per primo ci lascia invece una dimostrazione dell'infinità del cosmo basandosi sul semplice ragionamento che arrivando all'estremo limite di esso e scagliando una freccia essa dovrebbe cadere in un luogo oppure essere fermato da qualcosa

E non importa in qual parte si collochi: sempre  
 Occupi il posto che vuole, si lascerà l'infinito  
 Esteso intorno ugualmente in ogni senso. Di più;  
 per un momento si ammetta che sia finito lo spazio  
 tutto quant'è: se qualcuno vi si spingesse fin sullo  
 orlo e dall'ultimo termine lanciasse un dardo veloce,  
 credi che andrebbe scagliato con gran vigore, al bersaglio,  
 e volerebbe lontano, o che qualcosa potrebbe  
 ostacolarlo e fermarlo? Perché bisogna che l'una  
 delle due cose accetti per vera. Ma ti preclude  
 e l'una e l'altra ogni scampo, e ti costringe ad ammettere  
 che l'universo si estende senza alcun limite. Infatti  
 o che un ostacolo al dardo tolga di giungere al segno  
 e di piantarvi, o che esso proceda dritto nel volo,

quel punto donde è partito non era l'ultimo. E allora per tutto dove tu voglia porre quell'ultimo limite ti seguirò domandandoti che ne sarà di quel dardo. (7)

In tempi più recenti Ermete Trismegisto dichiara che “Dio è una sfera intelleggibile, il cui centro sta dappertutto e la circonferenza in nessun luogo” e Bruno: “E’ dunque l’universo un infinito, immobile”. (8)

Interessante comunque che tutti gli autori citati pensino al cosmo come ad una sfera. Certamente la sfera è stata considerata segno di perfezione fin dalla più remota antichità, ma vi è anche un'altra ragione: chi segue un cammino circolare non giunge mai alla fine del cammino se non per tornare a compierlo in un modo che è vecchio e nuovo allo stesso tempo; ciò a differenza di una linea che o è una retta infinita in senso potenziale o di un segmento sempre finito. (Figura 17)

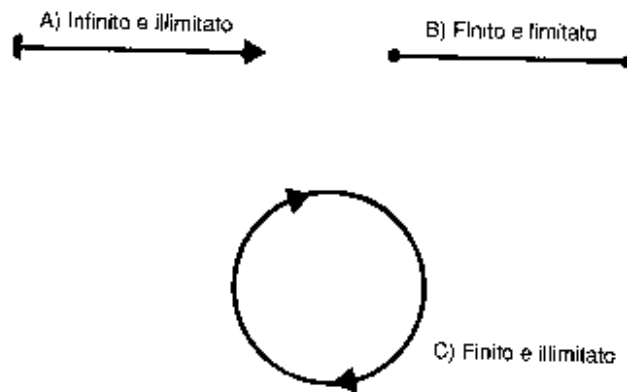


Figura 17

La sfera, come circolo dei circoli, presenta al massimo il carattere di senza fine ma anche di compiutezza proprie del circolo; essa non mente è, per dirla con Parmenide “sfero della ben rotonda infinità” e come tale perfetta rappresentazione dell’Essere come Tutto.

L’universo reimanniano modificando la visione d’un universo piatto a curvatura nulla a vantaggio d’un cosmo a curvatura positiva costante risolve il paradosso. Esso può avere un’estensione finita e non possedere alcun bordo o confine estremo e lo fa introducendo il concetto d’**ipersfera**.

L’ipersfera è, di fatto, un modo per costruire uno spazio tridimensionale finito e nello stesso tempo privo di punti di confine. Non è, infatti, necessario per costruire un’ipersfera passare ad un superiore livello dimensionale; certo nello spazio euclideo a quattro dimensioni l’equazione  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$  definisce un’ipersfera di raggio  $r$ , ma per studiare un’ipersfera non è necessario il modello quadridimensionale.

Immaginiamo, infatti, che lo spazio sia un’ipersfera: in tal modo sarà possibile coprire tutto lo spazio scegliendo un punto qualsiasi e facendovi espandere una sfera.

Ora se si fa espandere una sfera dentro un’ipersfera viene il momento in cui la circonferenza della sfera diviene un punto. Ciò si può cogliere facilmente pensando ai paralleli terrestri: mano a mano che si va da un polo all’altro i paralleli a causa della

curvatura crescente costante prima aumentano e poi diminuiscono fino a formare un punto ovvero l'altro polo.(figura 15)

La stessa cosa si avrebbe con le due sfere di figura 16 poste come tangenti l'una all'altra sulla sfera equatoriale.



Figura 18

Ora -come dicevamo all'inizio - nella *Divina Commedia* e per la precisione nel Canto XXVIII del *Paradiso* Dante Alighieri con uno slancio davvero sorprendente d'immaginazione poetica e matematica arriva ad una visione dell'universo che riecheggia in modo sorprendente ciò che abbiamo detto della ipersfera riemanniana.

Nella *Commedia* Dante descrive la realtà come formata da due livelli: il cosmo, caratterizzato dalle sfere planetarie e con al centro la Terra e la Candida Rosa con al centro l'Empireo ovvero Dio.

Ai tempi di Dante era universalmente accettato che il cosmo fosse composto da una serie di nove sfere cristalline in cui erano infisse i corpi celesti e al cui centro si trovava la Terra, immobile.

Il modello era essenzialmente quello aristotelico rivisitato da S. Tommaso D'Aquino; un modello d'universo finito, quindi, geocentrico e connotato dalla presenza oltre i suoi limiti di una pienezza sempre crescente della presenza divina che culminava nella Trinità divina stessa.

Dante, seguendo la sua guida Beatrice è condotto in un'ascensione che dalla montagna del Purgatorio lo porta a salire di grado in grado le varie sfere planetarie fino alla sfera del Primum Mobile.

La sequenza delle sfere è quella classica d'Aristotele: la sfera della Luna, di Mercurio, di Venere, del Sole, di Marte, di Giove, di Saturno, delle Stelle Fisse e del Primum Mobile.(figura 19)

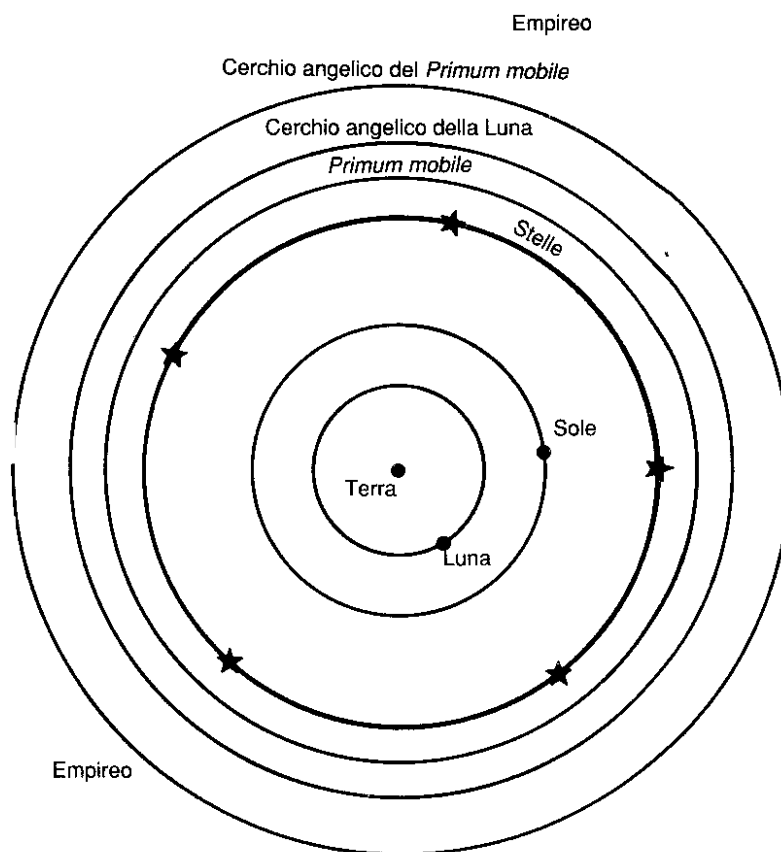


Figura 19

Qui giunto Dante guardando negli occhi di Beatrice vede rispecchiato in essi un fulgore d'incredibile intensità; si volge allora a guardarsi indietro e vede un punto luminoso così acuto che l'occhio non può reggerne il fulgore e deve chiudersi. Come dice il poeta:

Poscia che contro alla vita presente  
 De' miseri mortali aperse 'l vero  
 Quella che 'mparadisa la mia mente,  
 come il lo specchio fiamma di doppiero  
 Vede colui che se n'alluma retro,  
 prima che l'abbia in vista o in pensiero,  
 e sé rivolge per veder se 'l vetro  
 li dice il vero, e vede che 'l s'accorda  
 con esso come nota con suo metro;  
 così la mia memoria si ricorda  
 ch'io feci riguardando ne' belli occhi  
 onde a pigliarmi fece amor la corda.  
 E com'io mi rivolsi e furon tocchi  
 Li miei da ciò che pare in quel volume,  
 qualunque nel suo giro ben s'addocchi,  
 un punto vidi che raggiava lume  
 acuto sì, che 'l viso ch'elli affoca

chiuder conviensi per lo forte acume;  
e quale stella par quinci più poca,  
parrebbe luna, locata con esso  
come stella con stella si colloca. (9)

Dopo che Beatrice rivela a Dante il vero, parlando della presente corruzione degli uomini ed esaltando le gioie paradisiache, il poeta, come colui che scorge riflessa in uno specchio la fiamma di una torcia che l'illumina da dietro e voltandosi scopre che essa riproduce esattamente la realtà, guarda nella luce che splende nei begli occhi della sua donna. Essi riflettono il cielo dietro di lui per cui egli si volta ed è colpito da ciò che appare in una sfera rotante (il *Primum Mobile*) ovvero dalla luce di Dio: un punto di luminosità tanto abbagliante che l'occhio che esso illumina e brucia è costretto a chiudersi per l'intensità insostenibile. Quel punto è così piccolo che qualsiasi stella per quanto piccola se collocata vicino ad esso sembrerebbe grande come la luna.

Dio è quindi descritto come un punto luminoso: punto matematico, privo di dimensioni, indivisibile ed immateriale, "*ens omnino simplex*" e "*maxime ens et maxime indivisum*" come lo definisce l'Aquinate (10)

Forse cotanto quando pare appresso  
Allo cigner la luce che 'l dipigne  
Quando 'l vapor che 'l porta più è spesso,  
distante intorno al punto un cerchio d'igne  
si girava sì ratto, ch'avria vinto  
quel moto che più tosto il mondo cigne.  
E questo era d'un altro circuncinto,  
e quel dal terzo, e 'l terzo poi dal quarto,  
dal quinto il quarto, e poi dal sesto il quinto.  
Sopra seguiva il settimo sì sparto  
Già di larghezza, che 'l messo di Iuno  
Intero a contenerlo sarebbe arto.  
Cos'ì l'ottavo e 'l nono; e ciascheduno  
Più tardo si movea, secondo c'era  
In numero distante più dall'uno;  
e quello avea la fiamma più sincera  
cui men distava la favilla pura,  
credo, però che più di lei s'invera. (11)

Non più distante di quanto l'alone di vapore cinge d'appresso il sole o la luna che lo suscitano con i loro raggi e lo coloriscono, così altrettanto vicino al punto di luce gira un cerchio di fuoco, tanto velocemente da superare anche il moto di quel cielo che più rapido si volge intorno alla terra. E il primo cerchio di fuoco è cinto da un secondo e questo da un terzo e così di seguito da un quarto, da un quinto e da un sesto. Ancora sopra segue un settimo, tanto ampio in larghezza che anche l'arcobaleno, fosse pure un intero circolo sarebbe incapace di contenerlo.

Concentrici agli altri e sempre più estesi un ottavo e un nono. Ognuno dei nove cerchi si muove con velocità via via decrescente mano a mano che si allontana dal divino

centro, come pure meno risplende la fiamma più ci si allontana da quel cerchio che ruota più vicino alla “favilla” di pura luce. (Figura 20, da un’incisione di Gustavo Doré)

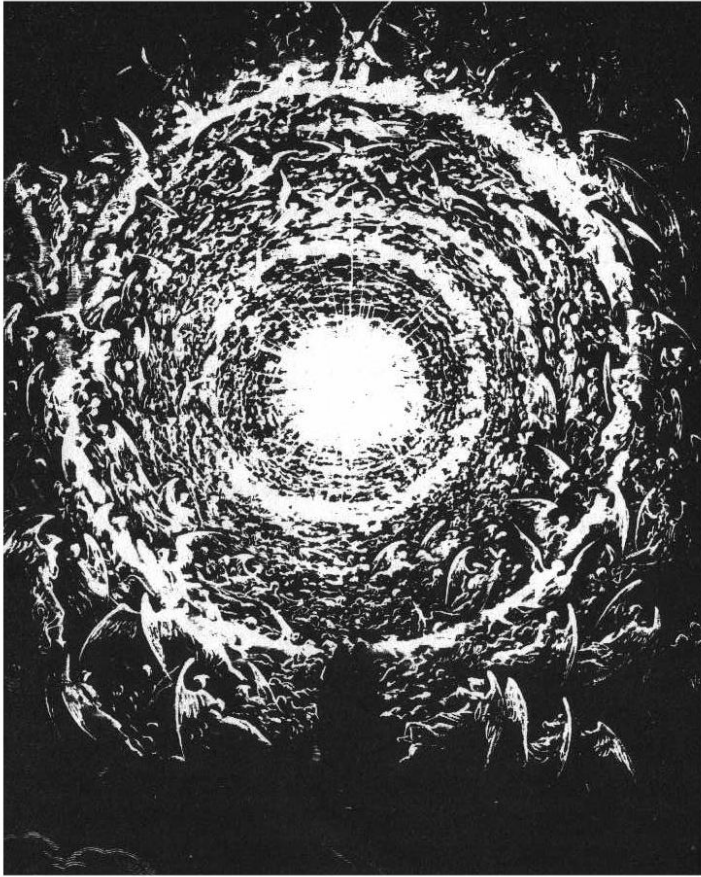


Figura 20

In altre parole velocità e luminosità dei nove cerchi sono in proporzione inversa della loro distanza dal centro luminoso che essendo somma verità, maggiormente approfondisce compenetra ciò che gli è più vicino.

La donna mia, che mi vedea un cura  
Forte sospeso, disse: “Da quel punto  
Dipende il cielo e tutta la natura.  
Mira quel cerchio che più li è congiunto;  
e sappi che ‘l suo muovere è sì tosto  
per l’affocato amore ond’elli è punto”.  
E io a lei: “Se ‘l mondo fosse posto  
Con l’ordine ch’io veggio in quelle rote,  
sazio m’avrebbe ciò che m’è proposto;  
ma nel mondo sensibile si pote  
veder le volte tanto più divine,  
quand’elle son dal centro più remote.  
Onde se ‘l mio disio deve aver fine  
In questo miro ed angelico templo  
Che solo amore e luce ha per confine,  
udir conviemmi ancor come l’esempio  
e l’assemblare non vanno d’un modo,



ché io per me indarno a ciò contemplo”.

Così la donna mia; poi disse: “piglia

Quel ch’io ti dicerò, se vuo’ saziarti;

ed intorno da esso t’assottiglia.

Li cerchi corporai son ampi e arti

secondo il più e ‘l men della virtute

Che si distende per tutte lor parti.

Maggior bontà vuol far maggior salute;

maggior salute maggior corpo cape,

s’elli ha le parti ugualmente compiute.

Dunque costui che tutto quanto rape

L’altro universo seco, corrisponde

Al cerchio che più ama e che più sape. (12)

Beatrice a questo punto, vedendo Dante assorto e in grave dubbio ricorda al poeta che il punto di luce, in quanto Dio, regge sia il mondo celeste che quello terrestre.

Poi chiarisce il perché i cerchi più vicini alla luce si muovano di moto più vorticoso ed abbiano un diametro più ristretto, al contrario del mondo sensibile dove avviene invece il contrario, antinomia in realtà facilmente superabile.

Bisogna infatti valutare che le sfere materiali (i cieli) sono più o meno vasti in proporzione della maggiore o minore virtù che necessitano allo scopo d’influire nel mondo sensibile sottostante.

La bontà o virtù infusa da Dio nei singoli cieli per mezzo delle intelligenze, infatti, mira ad estendere il suo benefico influsso sulle sfere sottostanti. Di conseguenza il cielo fisico del primo Mobile, che porta con sé nel suo movimento tutto il resto dell’universo deve essere il più grande e corrisponde al primo dei cerchi angelici - quello dei Serafini - che per la loro posizione più vicina a Dio, più si accendono nella carità e più sono illuminati dalla sapienza di Dio.

Così questo cielo spirituale, pur essendo *apparentemente* il più piccolo per misura supera per virtù gli altri.

Dante deve circoscrivere il suo esame comparativo al criterio della virtù e non a quello della grandezza *apparente* dei circoli; in altre parole la sfera del Primum Mobile fisica deve essere la più grande materialmente per contenere tutto l’universo creato e la sfera angelica del Primum Mobile spirituale deve *apparentemente* essere la più piccola per essere la più vicina alla presenza puntiforme di Dio e di conseguenza riceverne massimamente la virtù.

Abbiamo più volte usato la parola *apparentemente* e non a caso in quanto ci troviamo nel cuore della struttura reimaniana dell’universo dantesco. Se infatti con una rappresentazione di tipo piano come la figura 20 l’Empireo appare circondare l’intero spazio fisico e porsi come *lo* spazio *tout-court*, piegando lo spazio euclideo in una ipersfera l’Empireo diviene puntiforme. Nello spazio *finito* e *illimitato* della figura 21 tutto lo spazio oltre l’ultima sfera degli angeli si riduce ad un solo punto.

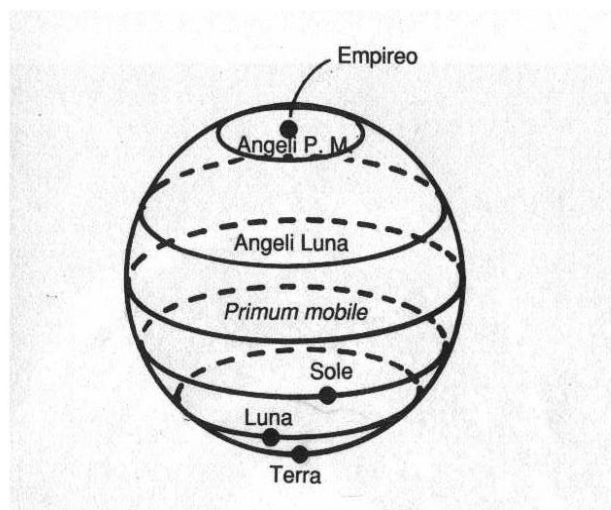


Figura 21

In effetti il modo in cui il mondo spirituale completa il mondo materiale strutturato sul modello di Riemann sembra essere lo stesso degli schermi di Einstein che nel suo modello galattico di completano a vicenda: le zone di sovrapposizione dei bordi dei due schermi possono essere assimilate al modello di corrispondenza che descrive il passaggio fra le sfere angeliche e quelle materiali. Quanto più è lontana una sfera dal centro di una carta, tanto più vicina è la sua controparte al centro dell'altra, cosicché le velocità delle sfere sono in armonia.

In sintesi: tra le sfere materiali la più veloce è quella più grande (il Primum Mobile) perché è di tutte la più vicina a Dio e di conseguenza la più perfetta e divina e come tale in grado di muovere tutto il mondo fisico; per la stessa ragione la sfera spirituale più veloce è la più piccola, di nuovo al più prossima a Dio. Si vede chiaramente la corrispondenza teologica che caratterizza l'armonia e lega fra loro le sfere spirituali e materiali. La corrispondenza fisica è - come suddetto - nel legame di continuità che unisce sfere materiali e spirituali in termine di posizione geometrica, in quanto più lontana è una sfera dal centro di una carta tanto più vicina è la sua controimmagine al centro dell'altra.

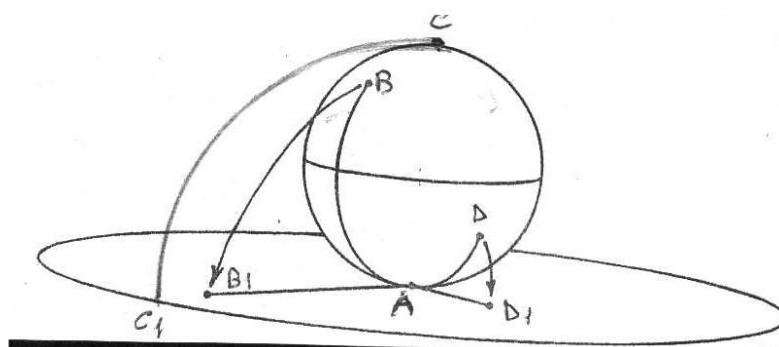


Figura 22

Che però l'empireo - che appare rappresentato nella figura 19 come esterno al mondo fisico ed infinitamente esteso - sia poi identificato come nella figura 21 con un punto geometrico privo di vere dimensioni spaziali, può certamente generare confusione ma essa si risolve osservando la rappresentazione di geometria sferica della figura 22.

In essa si vede chiaramente come proiettando un punto presente sulla sfera - che lo ricordiamo è a curvatura positiva costante - sulla superficie piatta tangente si individuino dei punti dai quali è possibile generare delle circonferenze corrispondenti ai paralleli della sfera stessa. Per quanto abbiamo detto agli inizi sulla proiezione di una sfera su di un piano (es. l'uso cartografico) s'ingenerano dei problemi di rappresentazione causati dalla non corrispondenza delle linee del piano con la vera posizione dei paralleli. Ora osservando attentamente la figura 22 si vede chiaramente che il polo nord della sfera che nella nostra rappresentazione dell'ipersfera riemanniana (figura 21) corrisponde all'Empireo proiettandosi sul piano genera una circonferenza massima che contiene tutte le circonferenze parallele tracciabili.

In altre parole la proiezione del nostro punto C sul piano coincide con la circonferenza  $C_1$  che contiene tutte le altre possibili circonferenze parallele.

L'Empireo viene così a connotarsi anche fisicamente come esterno a tutto il mondo sia fisico che spirituale, come tale senza fine ma finito e privo di dimensioni spaziali coincidendo così con il dettato dantesco.

Inoltre riferendoci al modello di carta topografica che avevamo definito egocentrico (figura 4) possiamo coglier un altro aspetto del modello dantesco e di quello riemanniano.

Per prima cosa tracciamo una mappa egocentrica fondata sul nostro pianeta e di cui le circonferenze concentriche rappresentino l'universo visibile col passare del tempo (che possiamo chiamare retroverso).

Ci apparirà una carta del tipo della figura 23 dove ogni circonferenza rappresenta la porzione di universo visibile ogni ulteriore miliardo di anni. La circonferenza esterna rappresenterebbe - se tale fosse l'età dell'universo, non solo il cosmo da noi visibile ma anche il Big Bang.

Si può più facilmente ancora visualizzare il tutto pensando tridimensionalmente ad una cipolla di cui noi (la terra) occupiamo il centro, mentre gli strati sono la radiazione residua, fossile dei primissimi stati della creazione.

L'ultimo degli strati (la scorza) rappresenterebbe come visto la singolarità originaria, il Big Bang.

Sembrerebbe di trovarsi di fronte ad un incredibile paradosso: i cerchi della figura sembrano diventare sempre più grandi quanto più si allontanano da noi, ma il cerchio più esterno dovrebbe in realtà essere concentrato in un singolo punto.

Ma il paradosso è solo apparente e deriva dall'assunto implicito che la figura sia disegnata in scala. Distanze ed angoli sono però rappresentati esattamente solo in relazione al centro, mentre per i soliti motivi cartografici la distanza tra due galassie lontane potrebbe essere gravemente distorta .

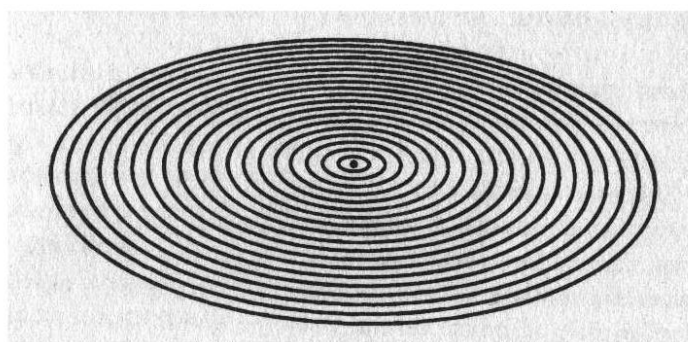


figura 23

Alternativamente , potremmo pensare ad un modello dove la singolarità è posta al centro degli strati concentrici. In effetti entrambe queste rappresentazioni sono due modelli d'ipersfera interscambiabili in quanto rovesciabili come un guanto.(figura 24)

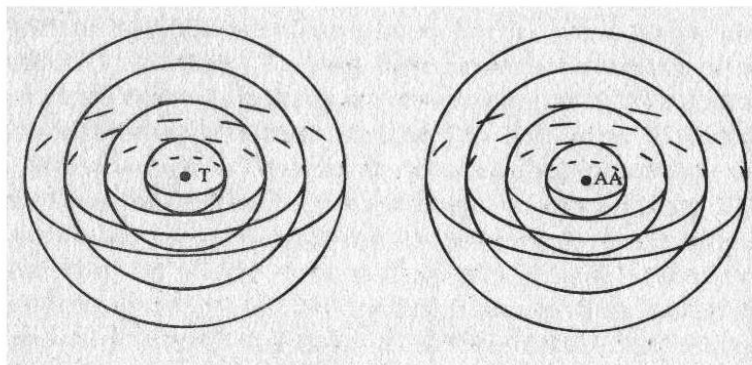


figura 24

La figura 25 ci mostra più in dettaglio ciò che abbiamo detto: in una rappresentazione piana T si troverebbe al centro e A sarebbe l'insieme dei punti che formano la circonferenza, ma in una rappresentazione sferica T e A A rappresenterebbero i due poli della sfera.

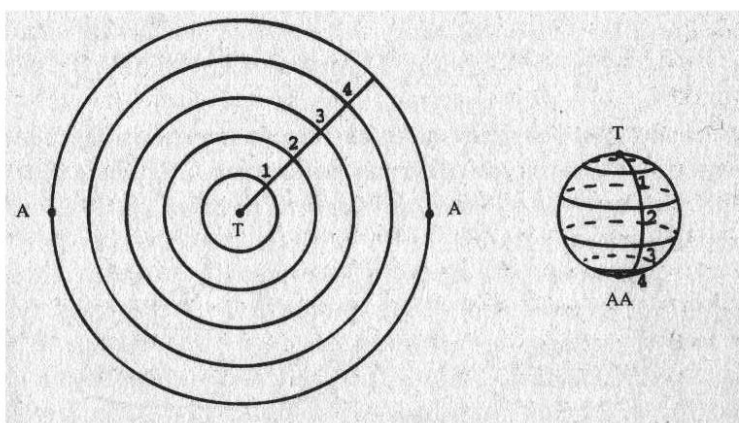


Figura 25

Inoltre rimanendo in temi di paradossi la legge di Hubble implica in realtà che tutte le galassie stanno allontanandosi anche l'una dall'altra allo stesso modo che da noi. In altri termini osservatori attivi in qualche altra galassia perverrebbero alla stessa legge riferita alla loro galassia.

In conclusione se proiettassimo a ritroso il film dell'evoluzione del nostro universo, a partire dalle attuali posizioni e velocità, troveremmo che l'universo intero risulterebbe concentrato in un luogo circa in un tempo corrispondente al nostro retroverso. Da ciò la conseguenza che il nostro universo, pur grande, sarebbe finito e noi ne conosceremmo il limite.

Il che ci riporta all'universo dantesco. Dio, il punto "...che raggiava luce/ acuto sì, che 'l viso ch'elli affoca/ chiuder conviensi per lo forte acume" coinciderebbe con il Big Bang di cui occuperebbe la posizione cosmologia descritta.

Come ben sappiamo si tratta solo d'ipotesi: alla luce delle nostre ulteriori conoscenze l'universo potrebbe essere infinito o finito e se finito a curvatura nulla, positiva, negativa, costante o incostante, potrebbe avere quattro ma anche ventuno dimensioni. Forse il futuro ci darà una risposta definitiva a questi problemi, che sfuggono quindi al nostro discorso, ma - allo scopo del nostro scritto non sembra pedissequo chiedersi se la costruzione spazio- poetica di Dante sia un possente sforzo d'intuizione fantastica a metà strada fra poesia e matematica senza alcuna pretesa "scientifica" o la trascrizione poetica di un modo di pensare che un approfondimento a livello di storia della scienza potrebbe rivelarci perfettamente normale in quel Tardo Medioevo ormai così lontano. Certamente non sono rari i casi in cui uno scrittore in un'opera di fantasia arriva a delineare situazioni o a descrivere eventi, anche paradossali, che si riproducono - contro ogni aspettativa - nel mondo reale e il caso di Dante potrebbe essere uno di questi.

Del resto poesia e matematica hanno molto in comune, anzi secondo alcuni occorre una fantasia maggiore per essere matematici che poeti e la struttura dell'universo che di fatto cerchiamo di comprendere con la matematica presenta delle armonie talvolta veramente incredibili.(13)

Questa interpretazione delle "precognizioni" dantesche è quella ad esempio di autori come Osserman o Rucker e certamente appare assai plausibile.

Altri però e cito per tutti William Egginton ritengono che la cosa sia più complessa e trovi la sua origine nella storia della scienza.

Intanto non si può non concordare con l'autore quando ricorda come il Medio Evo non sia un periodo caratterizzato solo da ostilità per il libero pensiero e le nuove conoscenze quanto un tempo in cui lo studio dei fenomeni poteva sostenere spiegazioni in contraddizione fra di loro ed esclusive l'una dell'altra, cosa che dimostra non solo la presenza di una dialettica scientifica ma anche una forte vivacità culturale.(14)

Inoltre la scienza medioevale non fu certo la "pedissequa ripetizione o una banale rielaborazione dei pensieri e delle opinioni di Aristotele", autore che fu molto criticato dalle figure di maggior spicco della scienza medioevale non solo per ragioni teologiche, ma anche strettamente scientifiche.(15)

A questo punto è quindi appare opportuno fare una riflessione d'ordine storico-scientifico sulla Filosofia Naturale all'epoca di Dante e sul rapporto di Dante con essa.

Per l'inizio del tredicesimo secolo l'occidente cristiano possedeva le traduzioni latine della maggior parte delle opere d'Aristotele come pure gran parte delle interpretazioni degli aristotelici arabi. Gli scritti di Platone erano meno conosciuti e quello certamente più studiato era il Timeo, ma diffuse erano le teorie neoplatoniche e soprattutto grande rilevanza avevano gli scritti dello Pseudo Dionigi.(16)

Se si vuole capire l'universo dantesco non si può prescindere dal *Corpus Aeropagiticum*.

S. Tommaso, seguendo Aristotele aveva posto la terra al centro dell'universo intorno ad essa ruotavano le sfere planetarie mosse dalle intelligenze angeliche che Gregorio Magno aveva precedentemente ordinato in una precisa gerarchia; al di sopra di esse si trovava il Primum Mobile introdotto originariamente per spiegare la precessione degli equinozi scoperta da Ipparco e in seguito utilizzato per spiegare il perfetto riposo della decima sfera ovvero dell'empireo.(17)

Lo Pseudo Dionigi capovolge la struttura geocentrica in una struttura geocentrica: Dio è al centro di tutto il complesso, secondo una concezione del tutto in accordo con le dottrine gnostiche e neoplatoniche; intorno a Dio --si hanno le sfere angeliche di diametro via via crescente; oltre l'ultima sfera c'è la tenebra nella quale agiscono, appropriatamente, gli imperfetti esseri umani.

Ora ciò implicava confinare Dio in un punto unico e fisso. Dante con la tendenza eclettica che gli è propria, ma anche con grande audacia riesce ad unificare i due schemi geocentrico e teocentrico. (18)

“Nell'universo che Dante descrive le schiere angeliche si trovano nell'Empireo in modo tale che le sfere celesti e quelle angeliche appunto si corrispondano come immagini speculari”.(19)

Giunto al limite di un mondo - quello fisico - Dante ne vede così un altro - quello spirituale - più splendente, ma specularmente simmetrico per struttura a quello che ha lasciato.

In pratica la visione dantesca non divenne mai cosmologicamente rilevante se non nell'ambito poetico e metaforico perché di fatto implicava che la natura e la forma di Dio potessero essere colte - se anche per un istante - dalla mente umana.

“Il modello usuale, al quale lo stesso Alighieri si attiene in altre sue opere (come il *Convivio*, ad esempio), era essenzialmente basato sulla sovrapposizione delle sfere angeliche su quelle dei pianeti che venivano fatte corrispondere ad esse”(20)

E' indicativo comunque che nella parte finale del canto Dante veda l'ordine delle gerarchie celesti come descritte dallo Pseudo Dionigi e non come elencate da S. Gregorio Magno che Dante aveva appunto seguito nel *Convivio*.

La visione di Dante dunque differisce per certi aspetti anche dalla più diffusa cosmologia medioevale ma sicuramente non se ne distacca su di un punto essenziale: l'assenza di limiti esterni e contemporaneamente la finitudine dell'universo..

Abbiamo visto come Dante pervenga sotto la guida di Beatrice alla sfera del Primum Mobile che gli appare composto da parti tanto vive ed eccellenti da poterlo considerare un tutto omogeneo al punto che non importa il punto in cui Beatrice sceglie d'entrarvi: “e parti sue vivissime ed eccelse  
sì uniforme son, ch'io non so dire  
qual Beatrice per loco mi scelse” (21)

Il fatto che Dante specifichi l'uniformità del Primum Mobile mostra che l'Empireo non è posto semplicemente alla sommità del cosmo fisico, in un posto specifico come talvolta appare nelle raffigurazioni dell'universo dantesco (Figura 26) quanto piuttosto l'empireo è dappertutto intorno a noi, formando uno “sfero” finito e senza limiti (Figura 27).

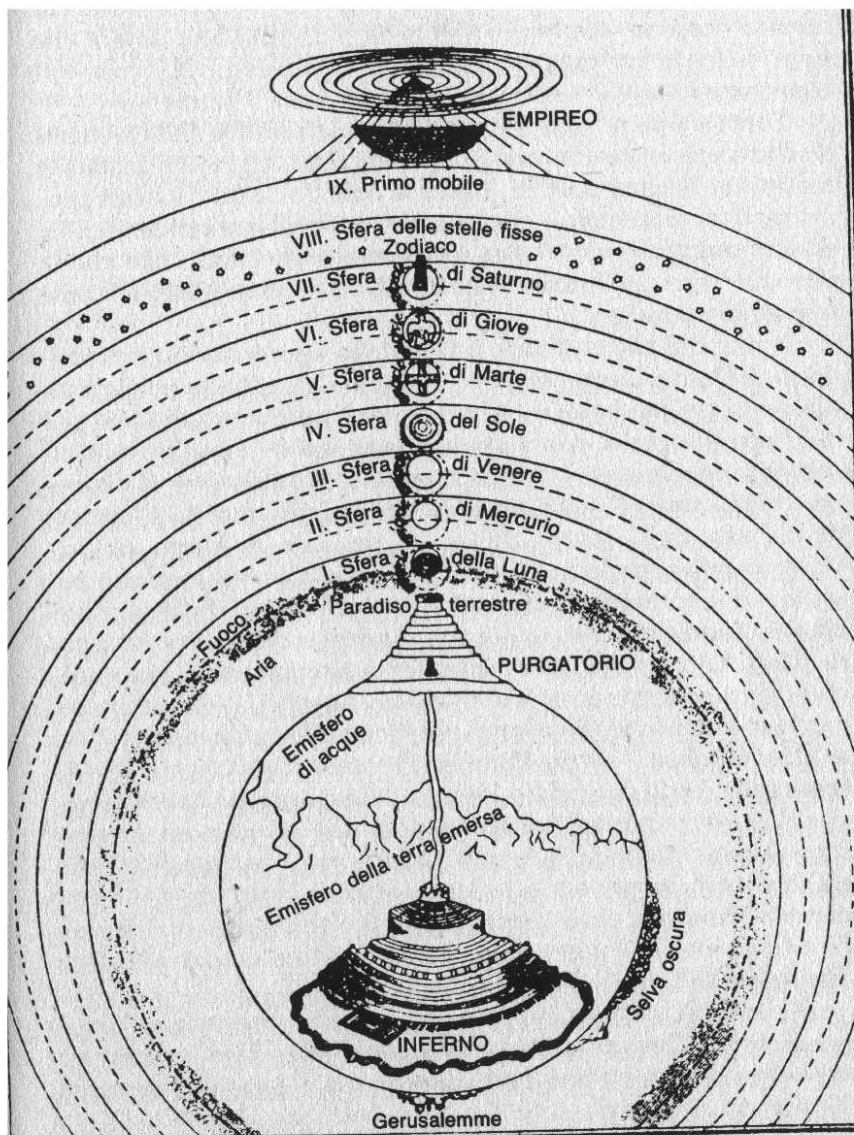


Figura26

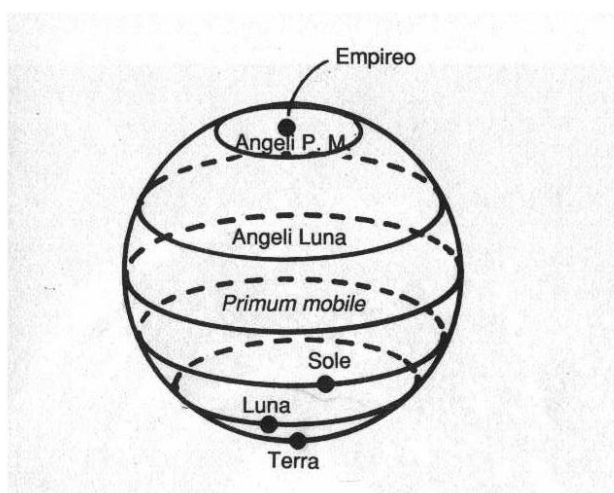


figura 27

Non solo, il Primum Mobile forma il confine esterno di un nuovo gruppo di sfere concentriche, quelle che culminano nell'Empireo verso il quale Dante *ascende* e non discende.

Come già detto tutto ciò coincide perfettamente con l'ipersfera reimaniana.

Ma lo ripetiamo ancora: è possibile che si tratti di una - a questo livello di precisione - incredibile coincidenza dovuta ad un volo pindarico o può essere legittimo ipotizzare

una profonda differenza epistemologica fra Dante e noi, il segno di un tipo di raffigurazione dello spazio - certamente incapace di generare l'astratta teoria geometrica di Riemann - ma capace comunque di immaginare un mondo dove lo spazio è curvo e dove l'universo può essere contemporaneamente finito e senza limiti? Come avrebbe in sostanza un medioevale percepito fisicamente la struttura del cosmo? Cosa avrebbe pensato di guardare ammirando il cielo in una notte tersa e stellata?

Noi moderni penseremmo di star guardando l'esterno del cosmo, ma un medioevale avrebbe percepito la cosa come un guardare all'interno.

Tutto ciò appare sicuramente a prima vista paradossale ma a ben guardare è perfettamente logico se ciò che si guarda è una sfera la cui circonferenza (l'esterno) coincide con il centro (l'interno).

Si potrebbe obiettare che non possiamo essere certi che un tale modello di pensiero venisse spontaneo ad un medioevale ma è legittimo pensarlo proprio perché un medioevale, Dante stesso, ci mostra di ragionare in tal modo.

In realtà, dobbiamo renderci conto che noi moderni quando pensiamo al cosmo siamo condizionati da una visione dello spazio infinito, tridimensionale e assolutamente indipendente dalle cose che contiene

Nell'intercorrere di tempo tra il '200 e il '600 si è passati da una configurazione epistemologica nella quale era difficile immaginare lo spazio come una entità indipendente e certamente non dotato dell'attributo della dimensionalità, ad uno per il quale l'assolutezza dello spazio e la sua dimensionalità diventano condizione necessaria per pensare il cosmo.

Come dicevamo questa nuova visione dello spazio ha una serie di aspetti fondamentali che sono l'essere piatto (a curvatura nulla) e soprattutto l'essere reale e non concettuale.(22)

Uno spazio così "divinizzato" fu il risultato di una fusione tra Teologia e Filosofia della natura che non sarebbe mai stata possibile nel Medio Evo. (23)

Come scrive un autorevole storico della scienza medioevale: "Nel XVII secolo, la corrente secolare e quella teologica si sarebbero fuse per la prima volta, quando Dio fu ritenuto onnipotente in uno spazio vuoto infinito, tridimensionale, immobile e omogeneo. Fu questo spazio riempito da Dio che sarebbe servito come contenitore infinito per il movimento dei corpi le cui leggi furono descritte da Sir Isaac Newton nei Principi matematici di Filosofia Naturale". (24)

Thomas Kuhn mette in luce come il passaggio ad un universo infinito derivi dall'affermarsi del neoplatonismo in quanto la finitezza dell'universo aristotelico era incompatibile con la perfezione di Dio: "La sua infinita bontà, essi pensavano, sarebbe stata soddisfatta soltanto da un infinito atto di creazione (...) Durante la Rinascenza, il ravvivarsi dell'esaltazione dell'infinita creatività di Dio costituì forse un elemento significativo del clima ideale che diede vita all'innovazione di Copernico. Certamente (..) esso fu un fattore di maggiore importanza nel passaggio, posteriore alla Rinascenza, dall'universo finito di Copernico allo spazio infinito del meccanismo del mondo newtoniano (...) Nessuna fondamentale scoperta astronomica, nessun nuovo tipo di osservazione astronomica convinsero Copernico dell'insufficienza dell'astronomia antica oppure della necessità di cambiare. Fino a mezzo secolo dopo la morte di Copernico non si verificò nessuna variazione potenzialmente rivoluzionaria negli elementi d'informazione a disposizione degli astronomi".(25)



Il carattere assoluto, totalmente staccato dalla sensorialità, dello spazio diviene diviene per Newton e per tutta la scienza moderna la condizione della possibilità stessa della conoscenza, il quadro di riferimento nel quale collocare l'organizzazione delle cose. In un simile universo non soltanto il carattere di mondo chiuso dell'universo dantesco ci diviene estraneo, ma proprio quei particolari problemi ai quali la sua poesia cercava di rispondere cessano d'esistere.

Ecco allora che se notiamo le similarità fra le sue descrizioni e certe figure quadridimensionali ci viene spontaneo rifiutare qualsiasi connessione, infatti se noi possiamo pensare in quattro dimensioni - come potrebbe farlo Dante?

Ma, se certamente Dante non può certamente concepire una quarta dimensione il suo universo appare quadridimensionale perché la nozione base di spazio disponibile nel Medio Evo non escludeva la curvatura, una esclusione che invece caratterizza l'età moderna.

Forse Dante concepiva il cosmo come una forma multi dimensionale in uno spazio curvo perché al suo tempo non era ancora stata insegnata l'impossibilità di farlo. (26)

In tal senso quando Riemann nell'800 offrì la sua soluzione essa non fu tanto una soluzione ad un problema quanto il ricordare l'esistenza di un problema: la certezza ontologica dello spazio euclideo.

Se dal diciassettesimo secolo fu dominante l'idea che il pensiero medioevale fu di poca se non di nessuna importanza per lo sviluppo della scienza oggi storici della scienza come David C. Lindberg ritengono che una delle più importanti questioni della storia della scienza occidentale sia l'estensione dell'importanza del pensiero medioevale nello sviluppo della scienza moderna. (27)

“ Quello che i fondatori della scienza moderna...ebbero da fare, non fu criticare e combattere certe teorie manchevoli, correggerle e sostituirle con altre migliori. Essi dovettero fare qualcosa di totalmente differente. Essi dovettero distruggere un mondo e sostituirlo con un altro”. (28)

Queste spunti ci portano necessariamente a fare una considerazione: la generale assunzione è che la conoscenza sia puramente cumulativa e che ciò che viene dimenticato viene dimenticato giustamente perché quello che viene perduto era non necessario.

Ma nell'intera economia del pensiero ciò non è sempre vero, è necessario riconoscere che talvolta ciò che è stato acquisito e apre nuove possibilità di pensiero chiude altre possibilità che età future dovranno riscoprire di nuovo.

Nel processo “evolutivo” possono cadere nel dimenticatoio idee ma soprattutto *formae mentis* che hanno un valore euristico anche importante e può così accadere che un poeta così lontano nel tempo sembri aspettarci, sorridendo, in cima alla montagna che con tanta difficoltà e fatica abbiamo scalato sicuri di esser i primi a giungere in vetta.

## Note al testo

1. Il primo a notare il rapporto fra Dante e l'ipersfera riemanniana è stato A.SPEISER, *Classiche Stucke der Mathematik*, Orel Fussli, Zurich, 1925, pp.53-59; altri contributi sono stati forniti da J. J. CALLAHAN, *La curvatura dello spazio in un universo finito*, *Le Scienze*, Dicembre 1976; M. PETERSON, *Dante and the 3-sphere*, *American Journal of Physic*, 47, 1979, pp.1031-1035 e W. EGGINTON, *On Dante, Hyperspheres, and curvature of the Medioeval Cosmos*, in *Journal of the History of Ideas*, Vol. 60, N. 2 (aprile 1999, pp. 195-216; altri accenni possono essere trovati in R. RUCKER, *La mente e l'infinito*, Muzzio editore, 1991, pp. 21-23 e R.OSSERMAN, *Poesia dell'universo*, TEA,1995, pp.93-94)
2. Cfr.N.I LOBACEVSKJI, *Pangéométrie*, in "Giornale di Matematiche",V,1867, p.335).
3. B. RIEMANN, *Ueber die Hypothesen,welche der Geometrie zu Grunde liegen*, trad.it. in A. EINSTEIN, *Relatività: esposizione divulgativa e scritti classici su Spazio, Geometria, Fisica*, Torino, Boringhieri, 1977, p.204).
4. F. Gaus lettera a Bessel, 9 aprile 1830
5. M. JAMMER, *Concept of space*, p.135, cit. da P. PARRINI, *Fisica e geometria dall'ottocento ad oggi*, Loescher,1979, p.51)
6. ARISTOTELE, *Fisica*, III, 7, 208°, Laterza 1983)
7. TITO LUCREZIO CARO, *De rerum natura*, I, versi 968-983, Rizzoli, 1953.
8. G: BRUNO,*De la causa, principio e uno*, in *Opere italiane*, Laterza, 1925.
9. D. ALIGHIERI, *Divina Commedia, Paradiso*, a cura di Natalino Spegno, Firenze, La Nuova Italia, 1974, canto XXVIII, versi 1-21.
- 10.T. D'AQUINO,*Summa Theologiae*, I, q. III, 7 e q. XI, 3.
- 11.D.ALIGHIERI *Divina Commedia*, cit. *Paradiso*, canto XXVIII, versi 22-39.
- 12.*Ibidem*, versi 40-72
- 13.In tal senso un simpatico aneddoto è narrato dal matematico Robert Osserman che racconta come il grande David Hilbert noto come uno studente avesse smesso di frequentare le sue lezioni. Informato che costui aveva abbandonato la matematica per dedicarsi alla poesia sembra che abbia esclamato: " Ha fatto bene. Non aveva abbastanza immaginazione per un matematico". R. OSSERMAN, *Poesia dell'universo*, cit. p. 92.
- 14.W. EGGINTON, *On Dante...*, cit., p.196.
- 15.E. GRANT, *La scienza nel medioevo*, Il Mulino, Bologna, 1997, p.111.
- 16.Sulle traduzioni delle opere scientifiche tra il dodicesimo e il tredicesimo secolo Cfr. Grant, *La Scienza...*, cit, pp. 29-31; sul *Corpus Aeropagiticum* e il suo impatto in occidente cfr. C: VASOLI, *Storia della filosofia medioevale*, Feltrinelli, Milano, 1972, pp.56-59; AA.VV., *Storia della filosofia medioevale*, Bari , Laterza, 1996, pp.90-93 eJ.R: WEINBERG, *Introduzione alla filosofia Medioevale*, Bologna, Il Mulino, 1985, pp.51-53.
- 17.Cfr. A. KOESTLER, *I sonnambuli*, Milano, Jaca Book, 1991, p.95; cfr anche T. S. KUHN, *La rivoluzione copernicana*, Torino, Einaudi, 1972, p.143 nota 1.
- 18.Cfr. E HARRISON, *Le maschere dell'universo*, Milano, Rizzoli, 1989, p.110-112.

19. *Ibidem*, p. 112.
20. Cfr. *Ibidem*, p.113.
21. D. ALIGHIERI, *Divina Commedia*, cit, *Paradiso*, canto XXVII, versi 100-102.
22. Sul passaggio dalla concezione aristotelica a quella euclidea cfr. A. KOYRE', *Dal mondo chiuso all'universo infinito*, Milano , Feltrinelli, 1970.
23. Sulla "divinizzazione" dello spazio euclideo cfr., *ibidem*, cap. VIII.
24. E. GRANT, *Place and Space In Medieval Physical Thought in Motion and Time Space and Matter: Interrelations in the History of Philosophy and Science*, Peter K. Machamer and Robert G Turnbull Eds., p.161; reprint in GRANT, *Studies in Medieval Science and Natural Philosophy*, London, 1987.
25. T. S. KUHN, *La rivoluzione copernicana*, cit, pp.169-170.
26. Cfr. W. EGGINTON, *On Dante...*, cit. , p.213.
27. Cfr. D:C. LINDBERG, *The Beginning of Western Science*, Chicago, 1992, pp. 355-368.
28. *Ibidem*, p.359 (traduzione dell'autore)