

12.9 Sovrapposizione di due MAS: direzioni perpendicolari

Consideriamo una particella in moto in un piano in modo tale che le sue due

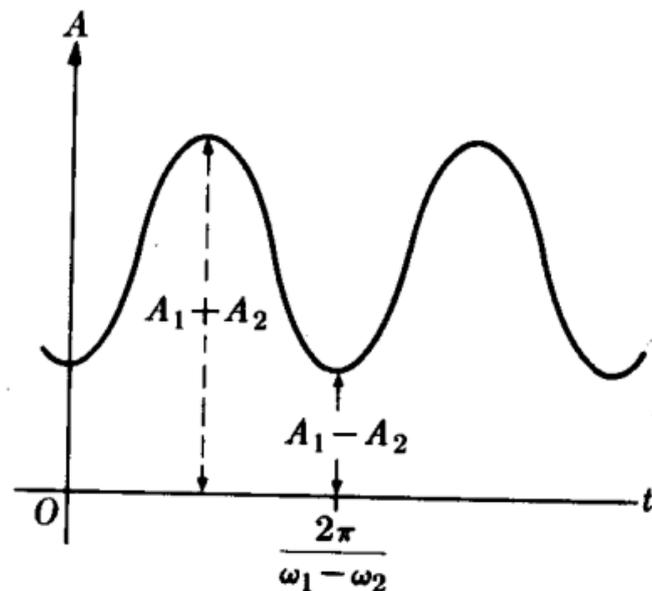


Fig. 12-16. Fluttuazione di ampiezza, o battimenti.

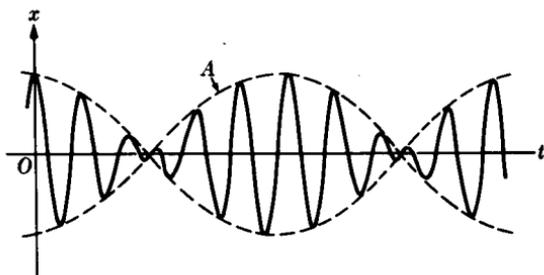


Fig. 12-17. Battimenti per ampiezze uguali.

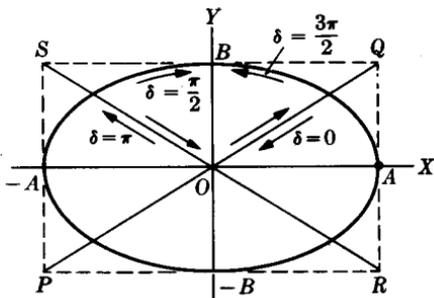


Fig. 12-18. Composizione di due MAS di ugual frequenza, ma aventi direzioni perpendicolari. La traiettoria dipende dalla differenza di fase.

coordinate x e y oscillino con moto armonico semplice. Esaminiamo dapprima il caso in cui i due moti abbiano la stessa frequenza. Scegliendo la nostra origine del tempo in modo che la fase iniziale per il moto lungo l'asse X sia nulla, abbiamo, per la coordinata x

$$x = A \cos \omega t. \quad (12.28)$$

Il moto lungo l'asse Y è descritto dall'equazione

$$y = B \cos(\omega t + \delta), \quad (12.29)$$

dove δ è ora la differenza di fase fra le oscillazioni x e y . Abbiamo anche supposto che le ampiezze A e B siano differenti. La traiettoria della particella è ovviamente limitata dalle rette $x = +A$ e $y = +B$.

Quando i due moti sono in fase, $\delta = 0$ e $y = B \cos \omega t$ che, combinata con l'Eq. (12.28), dà:

$$y = (B/A)x.$$

Questa è l'equazione della linea retta PQ nella Fig. 12-18, e il moto risultante è armonico semplice, con ampiezza $\sqrt{A^2 + B^2}$, poiché lo spostamento lungo la retta PQ è

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega t. \quad (12.30)$$

Se i due moti sono in opposizione, $\delta = \pi$, e $y = -B \cos \omega t$. Questa relazione combinata con l'Eq. (12.28) dà

$$y = -\frac{B}{A}x,$$

che è l'equazione della linea retta RS . Il moto è di nuovo armonico semplice, con ampiezza $\sqrt{A^2 + B^2}$. Diciamo che quando $\delta = 0$ o π , l'interferenza di due moti armonici semplici perpendicolari della stessa frequenza produce una *polarizzazione rettilinea*.

Quando $\delta = \pi/2$ si dice che i moti lungo gli assi X e Y sono in *quadratura*, e

$$y = B \cos(\omega t + \pi/2) = -B \sin \omega t,$$

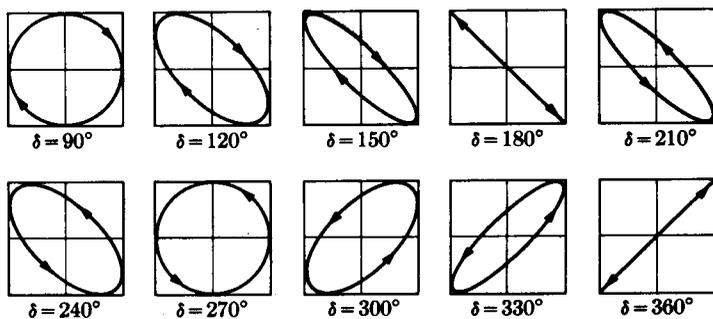


Fig. 12-19. Traiettorie per alcune differenze di fase.

che, combinata con l'Eq. (12.28), dà

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

che è l'equazione dell'ellisse illustrata nella Fig. 12-18. L'ellisse è percorsa in senso orario. Ciò si può verificare trovando la velocità della particella nel punto $x = +A$, nel quale la velocità è parallela all'asse Y . In questo punto, tenendo presente l'Eq. (12.28), dobbiamo avere $\cos \omega t = 1$. La componente Y della velocità è $v_y = dy/dt = -\omega B \cos \omega t = -\omega B$. Poiché essa è negativa, il punto passa per A muovendosi verso il basso, il che corrisponde a una rotazione in senso orario. Si ottiene la stessa ellisse se $\delta = 3\pi/2$ o $-\pi/2$, ma in tal caso il moto è antiorario (può lo studente verificare questa asserzione?). Possiamo quindi dire che quando la differenza di fase è $\delta = \pm \pi/2$, l'interferenza di due moti armonici semplici della stessa frequenza dà luogo a una *polarizzazione ellittica*, con gli assi dell'ellisse paralleli alle direzioni dei due moti.

Per un valore arbitrario della differenza di fase δ , la traiettoria è ancora un'ellisse, ma i suoi assi sono ruotati rispetto agli assi coordinati. Le traiettorie per alcune differenze di fase particolari sono illustrate nella Fig. 12-19. Quando $A = B$, l'ellisse si trasforma in un cerchio e si ha la *polarizzazione circolare*.

Ricordando il Paragrafo 12.3, i moti descritti dalle Eqq. (12.28) e (12.29) necessitano di forze lungo gli assi X e Y uguali a $F_x = -kx$ e a $F_y = -ky$. La forza risultante agente sulla particella è quindi proporzionale e opposta al vettore posizione della particella $\mathbf{r} = \overline{OP}$ (Fig. 12-20). Il moto che abbiamo descritto cinematicamente in questo paragrafo è prodotto da una forza centrale attrattiva proporzionale allo spostamento: $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$.

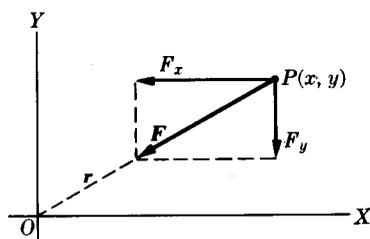


Fig. 12-20. Forza attrattiva proporzionale allo spostamento.

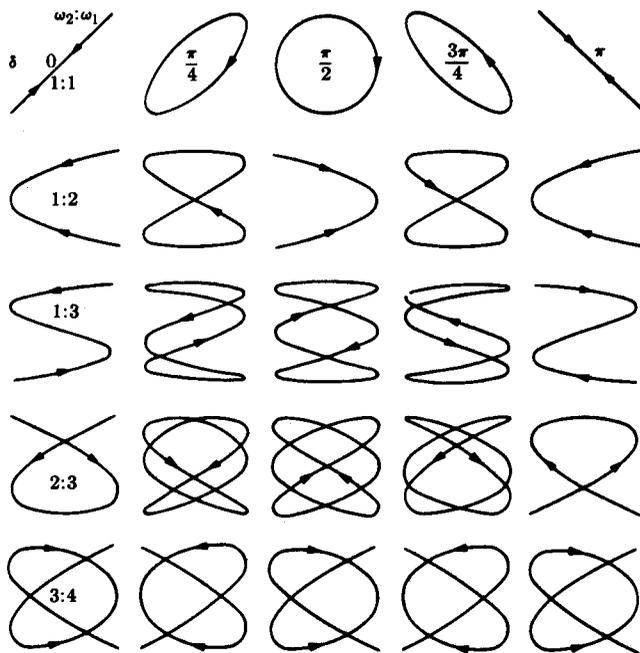


Fig. 12-21. Figure di Lissajous. Esse dipendono dal rapporto ω_2/ω_1 e dalla differenza di fase.

Un'altra situazione interessante è l'interferenza di due moti oscillatori perpendicolari di frequenze differenti. Cioè,

$$x = A_1 \cos \omega_1 t, \quad y = A_2 \cos (\omega_2 t + \delta). \quad (12.31)$$

La traiettoria risultante dipende dal rapporto ω_2/ω_1 e dalla differenza di fase δ . Queste traiettorie sono dette *figure di Lissajous*, e sono illustrate nella Fig. 12-21 per diversi valori del rapporto ω_2/ω_1 e per diverse differenze di fase in ciascun caso.

12.10 Oscillatori accoppiati

Una situazione che si incontra molto frequentemente è quella di due oscillatori *accoppiati*. Tre situazioni possibili sono illustrate nella Fig. 12-22. In (a) abbiamo due masse m_1 ed m_2 fissate a due molle k_1 e k_2 e accoppiate tramite una molla k , in modo che i moti di m_1 ed m_2 non sono indipendenti. In (b) abbiamo due pendoli accoppiati mediante una fune AB . In (c) i corpi I_1 e I_2 fissati alle sbarre k_1 e k_2 sono accoppiati tramite una sbarra k , formando due pendoli di torsione accoppiati. Incontreremo una situazione simile quando descriveremo i circuiti elettrici oscillanti accoppiati. L'effetto risultante dell'accoppiamento di due oscillatori si può descrivere come uno scambio di energia tra essi.