LICEO SCIENTIFICO STATALE "L. DA VINCI" - GALLARATE
Simulazione seconda prova esame di Stato 2003-2004
Classi quinte non sperimentali - 18 maggio 2004

Cognome ____________________ Nome ____________________ Classe ________

Svolgere uno dei due problemi e trattare cinque dei dieci quesiti che seguono. Segnare, quindi, nell'apposito spazio in fondo al foglio, quale problema e quali quesiti devono essere corretti.

Problema 1

È data la funzione $f(x)$, di equazione $y = -4(x^3 + 3x^2 - 2)$. Sia $g(x)$ la primitiva di $f(x)$ che ha fra i suoi zeri lo zero intero (relativo) di $f(x)$.

1. Determinare l'equazione di $g(x)$.
2. Studiare $g(x)$ e rappresentare il suo grafico. Trovare, in particolare, le coordinate dei flessi e dire se $g(x)$ ha massimi e minimi assoluti.
3. Calcolare l'area, S, individuata dall'arco di grafico di $g(x)$ compreso fra il punto di minimo e il punto di ascissa nulla e dagli assi cartesiani.
4. Trovare la parabola γ, di equazione $y = h(x)$, passante per il punto di minimo, m, di $g(x)$, avente il vertice, V, di ascissa nulla, e tale che l'arco di parabola compreso fra m e V individui con gli assi cartesiani una parte di piano di area uguale ad S.
5. Verificato che si ha: $h(x) = -\frac{27}{10}x^2 + \frac{27}{10}$, rappresentare γ e risolvere graficamente la disequazione $g(x) > h(x)$, fornendo una valutazione approssimata delle ascisse dei punti di intersezione delle due curve corrispondenti.
6. Servendosi del grafico di $g(x)$ dire, <u>al variare di k,</u> quante soluzioni *reali* ammette l'equazione: $x^4 + 4x^3 - 8x + k = 0$, distinguendo il caso che esse siano positive o negative, distinte o coincidenti.

Problema 2

Su un piano p è dato il rettangolo $ABCD$ di lati $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{AD} = 3a$.
Dal punto A si innalza la perpendicolare VA al piano p e si consideri la piramide $VABCD$. Detto α l'angolo che lo spigolo VB forma con il piano p.

1) Esprimere in funzione di α la lunghezza di ciascuno dei quattro spigoli uscenti da V; verificare che le quattro facce triangolari della piramide sono tutte costituite da triangoli rettangoli; indicare, in particolare, qual è l'angolo retto nella faccia di base BC e in quella di base CD.
2) Esprimere, in funzione di α, il volume e l'area della superficie totale della piramide $VABCD$.
3) Determinare α in maniera tale che la somma dei quadrati delle aree delle facce triangolari della piramide valga $272a^4$.

In corrispondenza del valore di α determinato:

4) intersecare la piramide con un piano p', parallelo a p. Posta uguale ad x la distanza tra i due piani, calcolare il rapporto $f(x)$ fra il volume della piramide che si forma fra p' e il vertice V

ed il quadrato del volume del prisma compreso fra i due piani e con base la sezione generata dal piano p' con la piramide $VABCD$.

5) Studiare la funzione $y=\frac{9}{4}f(x)$, verificando che si ottiene $y=\frac{1}{4x^2-x^3}$, e tracciare il suo grafico, evidenziando l'arco relativo al problema geometrico. Determinare, in particolare, il valore minimo della funzione rispetto alle limitazioni insite nel problema geometrico. 10
6) Servendosi del grafico rappresentato, dire - al variare di k - quante soluzioni reali ammette l'equazione $x^3-4x^2+k=0$

Quesito 1

Dimostrare che una funzione di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a \neq 0)$

1. ammette sempre un flesso F;
2. se la funzione ha anche un minimo e un massimo, allora il flesso F è il punto medio del segmento che ha per estremi il minimo e il massimo.

Quesito 2

Nel piano, fissato un riferimento cartesiano xOy sono date le rette r ed s, rispettivamente di equazioni $y = 3$ e $y = 6$. Una generica retta t uscente dall'origine O interseca r in A ed s in B. Sulla perpendicolare a t in A si prendono i punti P e Q tali che $AB = AP = AQ$. Determinare l'equazione del luogo descritto dai punti P e Q al variare di t attorno ad O.

Quesito 3

Dimostrare che la semicirconferenza circoscritta ad un assegnato triangolo rettangolo individua, con le due semicirconferenze esterne al triangolo ed aventi per diametri rispettivi i due cateti, due lunule[1], la somma delle cui aree è uguale all'area del triangolo dato.

Quesito 4

È fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Che relazione c'è fra due rette, nessuna delle quali sia parallela all'asse delle ordinate, una di coefficiente angolare m e l'altra di coefficiente angolare $\frac{1}{m}$? Giustificare la risposta con opportune dimostrazioni.

Quesito 5

In un riferimento cartesiano ortogonale è dato il quadrato $ABCD$, di lato unitario. Il vertice A coincide con l'origine degli assi, B è sul semiasse positivo delle ascisse e le lettere che indicano i vertici sono disposte in senso antiorario. Sui segmenti AB, BC, CD, DA si prendono, rispettivamente i punti A', B', C', D' tali che $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}=\frac{1}{n}$, con n numero intero positivo.

Detti E il punto d'intersezione fra $A'C$ e AB' ed F il punto d'intersezione fra CD' e $C'A$, trovare la funzione che esprime la variazione dell'area del parallelogramma $AECF$, al variare di n, determinando il suo valore massimo.

Quesito 6

Una funzione di espressione $y = f(x)$ è definita, continua e derivabile per ogni x reale. Si sa inoltre che $f(x)$ è positiva per $x< 1$ o $x >3$, negativa per $1 <x< 3$, assume valore minimo, $y = -1$, nel punto $x = 2$, non ha flessi, né altri punti estremanti, oltre $x = 2$.

---

[1] Si definisce lunula la figura limitata da due archi di cerchio, di raggio diverso, con gli estremi coincidenti e giacenti dalla stessa parte della corda comune.

Determinare eventuali massimi, minimi e flessi a tangente orizzontale delle funzioni $y = f^2(x)$ e $y = f^3(x)$. Giustificare i risultati.

Quesito 7

Data la funzione $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, determinare, se esiste un punto interno all'intervallo $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ in cui la tangente al grafico di $f(x)$ è parallela alla retta $y = x + 2$.

Quesito 8

Data la funzione $f(x) = 2x + \ln(2+x)$ verificare che è invertibile nel suo dominio. Determinare, quindi, la derivata della funzione inversa nel punto corrispondente ad $x = 1$.

Quesito 9

Determinare gli angoli di un triangolo isoscele in modo che sia minimo il rapporto tra il raggio del cerchio circoscritto e quello del cerchio inscritto nel triangolo.

Quesito 10

Dopo aver verificato (eventualmente utilizzando la definizione di integrale indefinito) che:

$$\int (\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)dx = \frac{1}{4}(3x + \operatorname{sen} x \cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x \cos x) + c$$

calcolare: $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)dx$$

Indicare problema e quesiti che si chiede siano corretti e valutati.

P1	P2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10

- *È consentito solo l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile.*
- *Tempo a disposizione: cinque ore. Non è possibile consegnare prima delle ore 12.*
- *L'uso del telefono cellulare durante la prova comporta l'annullamento della prova e l'immediata espulsione, con conseguenti sanzioni disciplinari.*