

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ classe 5 sez \_\_\_\_ 16.05.2014

**SIMULAZIONE ESAME di STATO LICEO SCIENTIFICO tema di MATEMATICA**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario, indicando nella griglia il problema e i quesiti scelti.*

P1	P2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10

**Problema 1**

Nel piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$  è assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + ax - b}{-x^2 - cx + 2}$$

a) Si trovino i valori dei parametri reali  $a$ ,  $b$  e  $c$  tali che la curva  $\gamma$  grafico della funzione sia tangente nell'origine all'asse delle  $x$  ed ammetta come asintoto verticale la retta di equazione  $x = 1$ .

b) Verificato che la funzione è

$$f(x) = \frac{x^2}{-x^2 - x + 2}$$

si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$  su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .

c) Si verifichi che la generica retta di equazione  $y = mx$  incontra ulteriormente la curva  $\gamma$  in due punti  $A$  e  $B$  tali che, proiettati rispettivamente nei punti  $A'$  e  $B'$  sull'asse  $x$ , la circonferenza di diametro  $A'B'$  interseca l'asse  $y$  in due punti  $C$  e  $D$  indipendenti da  $m$ .

d) Si determini l'area della regione finita di piano  $R$  delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse delle  $x$  e dalle rette di equazione  $x = 2$  e  $x = 4$ .

**Problema 2**

Si consideri la famiglia di funzioni  $f_n(x) = x^n e^{(x-1)}$ , con  $n$  numero intero positivo.

a) Si verifichi che tutte le funzioni  $f_n(x)$  passano per due punti fissi del piano.

b) Si studino le due funzioni  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  e se ne disegnino i rispettivi grafici  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in un medesimo piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .

c) Si determini l'area della regione finita di piano  $R$  delimitata dalle due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

d) Si dimostri che le funzioni  $f_n(x)$  ammettono un estremo relativo in un punto di ascissa  $-n$ ; si discuta la natura di tale estremo relativo al variare di  $n$ .

*Durata massima della prova: 5 ore.*

*È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.*

**Quesito 1**

Si determini il campo di esistenza della funzione:  $f(x) = \ln|\sqrt{-1+x} - \sqrt{-x+1}|$

**Quesito 2**

La sommità di una torre, situata sulla riva di un lago, è vista da una barca in avvicinamento dapprima sotto un angolo di  $15^\circ$ , quindi, dopo un percorso di 30 m, sotto un angolo di  $75^\circ$ . Ricavare l'altezza della torre, senza approssimazioni.

**Quesito 3**

Si enunci il criterio di derivabilità di una funzione in un punto  $x_0$ .

Data la funzione 
$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x-2}{x-3}\right) & ; x \geq 2 \\ e^{4-2x} - \ln(3-x) & ; x < 2 \end{cases}$$

- calcolare la derivata prima della funzione;
- stabilire se la funzione  $f$  è derivabile nel punto di ascissa  $x = 2$ .

**Quesito 4**

Si dimostri che la curva di equazione  $y = x^3 - 2x^2 + 2$  ha una sola intersezione con l'asse delle ascisse.

**Quesito 5**

Si devono utilizzare 20 m di filo per recintare una zona di prato che deve avere la forma di un settore circolare. Determinare la misura del raggio del settore che fornisce la massima superficie delimitata dal filo. Calcolare anche l'ampiezza dell'angolo di apertura del suddetto settore circolare.

**Quesito 6**

Si calcoli il limite della funzione  $(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}$ , quando  $x$  tende a 0.

**Quesito 7**

In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$  la regione piana  $R$  è definita dal sistema

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Si determini il volume del solido generato dalla rotazione di  $180^\circ$ , attorno all'asse delle ascisse, della regione  $R$ .

**Quesito 8**

La posizione di una particella, in moto su una linea retta, è data da:

$$s(t) = 10 \cdot \cos(4t)$$

nelle unità di misura del Sistema Internazionale. Verificare che la sua accelerazione è direttamente proporzionale alla sua posizione  $s$  in ogni istante  $t$ . Determinare in quale istante il punto materiale occupa per la prima volta la posizione  $s(t) = -5$  e calcolare in tale istante la velocità e l'accelerazione della particella.

**Quesito 9**

Data la funzione 
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ x^3 + ax + b & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

determinare per quali valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione nell'intervallo  $[-1,1]$ .

**Quesito 10**

Un tetraedro, un esaedro e un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza  $l$ . Determinare per quale dei tre solidi è maggiore il rapporto  $\text{Volume} / \text{Superficie totale}$ .