Sessione ordinaria 2010
Seconda prova scritta
30787.2.1/1

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

# M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

***Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.***

## PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, $P$ un punto di $AB$ e $\gamma$ la circonferenza di centro $P$ e raggio $AP$. Si prenda sul lato $BC$ un punto $Q$ in modo che sia il centro di una circonferenza $\lambda$ passante per $C$ e tangente esternamente a $\gamma$.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di $\lambda$ in funzione di $x$ è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. 10
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate $Oxy$, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad $x$ dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa? 20
   5 + 5 + 5 + 5
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R\ (0, 1)$? E nel punto $S\ (1, 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $S$? 20
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo $ROS$, ove l'arco $RS$ appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$. 10

## PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane $Oxy$, si consideri la funzione $f$ definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia $G_b$ il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di $b$. Si illustri come varia $G_b$ al variare di $b$. 30
2. Sia $P$ un punto di $G_b$. La tangente a $G_b$ in $P$ e la parallela per $P$ all'asse $y$ intersecano l'asse $x$ rispettivamente in $A$ e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia $P$, il segmento $AB$ ha lunghezza costante. Per quali valori di $b$ la lunghezza di $AB$ è uguale a 1? 20
3. Sia $r$ la retta passante per $O$ tangente a $G_e$ ($e$ = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta $r$ forma con il semiasse positivo delle ascisse? 20
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse $y$, da $G_e$ e dalla retta d'equazione $y = e$. 10

Sessione ordinaria 2010
Seconda prova scritta
30787.2.1/1

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

# M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado $n$. Si dimostri che la sua derivata $n$-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove $a_n$ è il coefficiente di $x^n$.

2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, $r$ la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e $P$ un punto di $r$ distinto da $B$. Si dimostri che i tre triangoli $PAB$, $PBC$, $PCA$ sono triangoli rettangoli.

3. Sia $\gamma$ il grafico di $f(x) = e^{3x}+1$. Per quale valore di $x$ la retta tangente a $\gamma$ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

4. Si calcoli: $\lim\limits_{x\to\infty} 4x \sin\frac{1}{x}$

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

7. Per quale o quali valori di $k$ la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \le 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

   è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di $n$?

9. Si provi che non esiste un triangolo $ABC$ con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse $x$ e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse $y$.

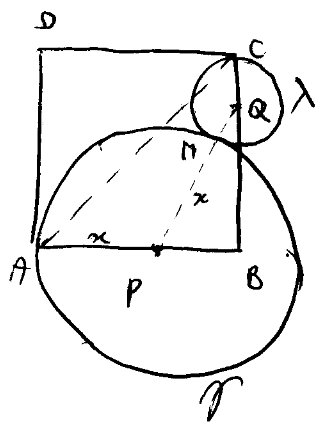
---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

1

# PROBLEMA 1

(a)



$\overline{AB} = 1$

$P \in \overline{AB}$

$Q \in \overline{BC}$

$\overline{AP} = x$

$\boxed{0 < x < 1}$

$\overline{PM} = \overline{AP} = x$

$\overline{PB} = 1 - x$

$\overline{PQ} = x + y$

$\overline{CQ} = y$

$0 < y < 1$

$\overline{BQ} = 1 - y$

$\widehat{PBQ}$ è RETTANGOLO

$\overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2$

$$\overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2 \Rightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2$$

$$1 + \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy$$

$$2xy + 2y = 2 - 2x$$

$$\cancel{2}y(x+1) = \cancel{2}(1-x)$$

$$\boxed{y = \frac{1-x}{1+x}}$$

"FUNZIONE OMOGRAFICA"

(b)

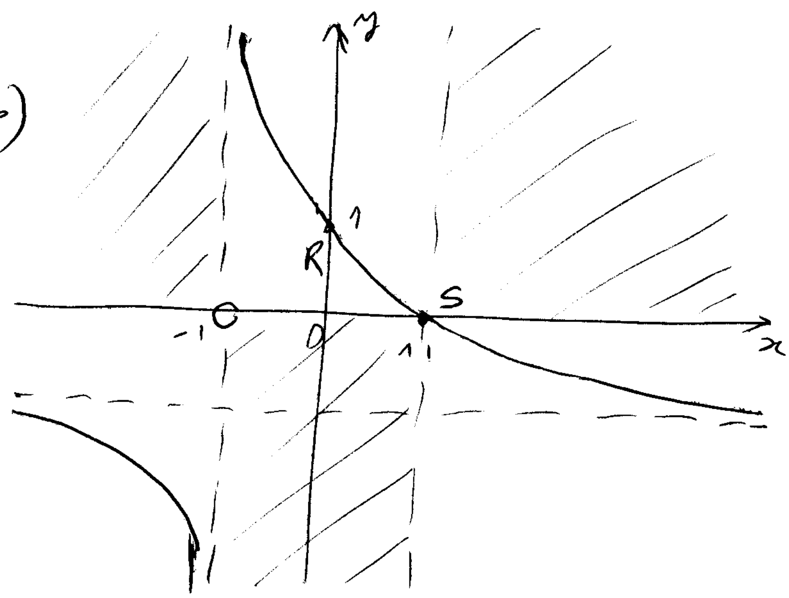
C.E. $x \neq -1$

$(-\infty; -1^-) \cup (-1^+; +\infty)$

$x = 0 \rightarrow y = 1 \quad R(0;1)$

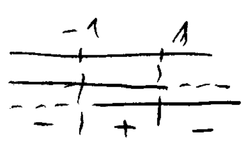
$y = 0 \rightarrow x = 1 \quad S(1;0)$

$f(-x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ né pari né dispari



$y > 0$ per $1 - x > 0 \quad x < 1$

$1 + x > 0 \quad x > -1$



$y > 0$ per $-1 < x < 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$$ ASINTOTO ORIZZONTALE $y = -1$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

ASINTOTO VERTICALE $x = -1$

2

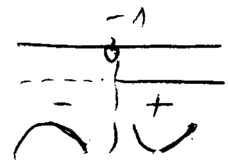
$$y' = \frac{-1(1+x) - (1-x)(+1)}{(1+x)^2} = \frac{-1 \cancel{-x} -1 \cancel{+x}}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \qquad CE'\ x \neq -1$$

$$y' > 0 \quad \text{PER} \quad \frac{-2}{(1+x)^2} > 0 \quad \nexists x$$

SEMPRE DECRESCENTE
NESSUN ESTREMO RELATIVO

$$y' = -2(1+x)^{-2}$$

$$y'' = -2(-2)(1+x)^{-3} = \frac{4}{(1+x)^3} > 0 \quad \text{PER } x > -1$$




NESSUN FLESSO

LA FUNZIONE È CONTINUA E MONOTONA DECRESCENTE IN $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ DUNQUE È INVERTIBILE SUL SUO CODOMINIO $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

$$y + xy = 1 - x$$

$$xy + x = 1 - y$$

$$x(1+y) = (1-y)$$

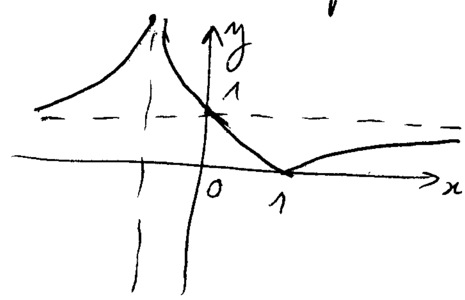
COINCIDE CON LA SUA INVERSA!

$$x = \frac{1-y}{1+y}$$

~~m~~ CE $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ CHE È IL CODOMINIO DELLA $f$ DATA

(c)

$$f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1-x}{1+x} & x < -1 \cup x > 1 \end{cases}$$




$R(0;1)$ ha $x > -1$, SIAMO NEL RAMO DI DESTRA

$$g'(x) = f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \qquad g'(0) = -2$$

$$y - 1 = -2(x - 0) \rightarrow \boxed{y = -2x + 1}$$

TG. IN R

$S(1;0)$ È UN PUNTO ANGOLOSO PERCHÉ:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(1+x)^2} = +\frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x)^2} & -1 < x < 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & x < -1 \cup x > 1 \end{cases}$$

TANG. SINISTRA: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

TANG. DESTRA: $y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \longrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

S NON APPARTIENE AL C.E. DI $g'(x)$

(d)

$$\text{Area}_{R\hat{O}S} = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1}\right) dx =$$

$$= \left[-x + 2\ln|x+1|\right]_0^1 =$$

$$= -1 + 2\ln 2 + 0 - \cancel{2\ln 1} =$$

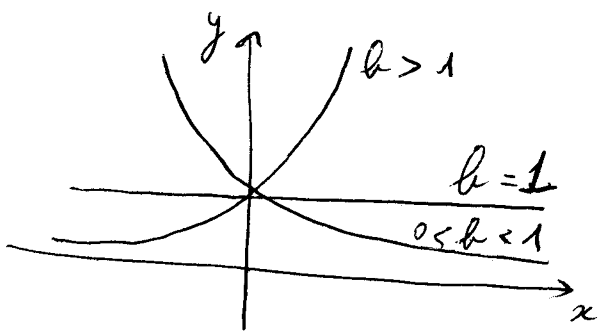
$$= \boxed{2\ln 2 - 1}$$

| $-x+1$ | $x+1$ |
|---|---|
| $x+1$ | $-1$ |
| $2$ | |

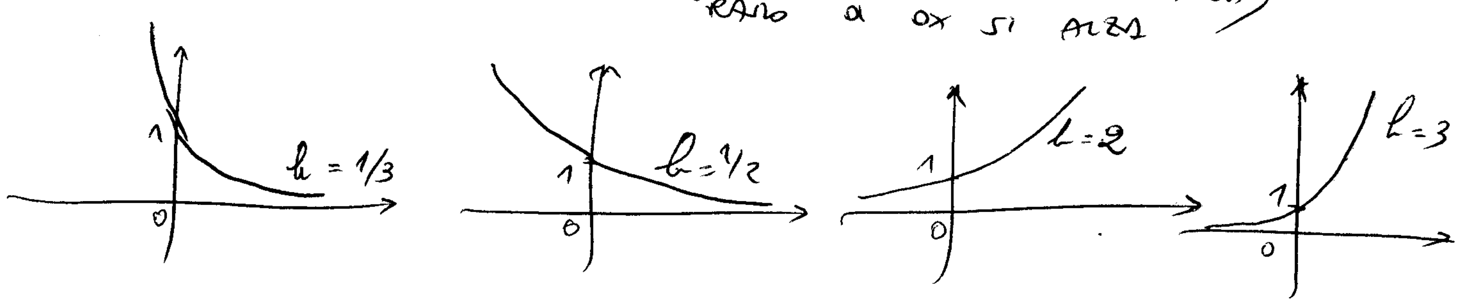
## PROBLEMA 2

$f(x) = b^x \quad b>0,\ b\neq 1 \qquad G_b$ GRAFICO DI $f(x)$

(a)




AL CRESCERE DI $b$ LA FUNZIONE TENDE A DIVENTARE ~~ORIZZONTALE~~ (IL RAMO DI SX SI ~~ABBASSA~~, QUELLO DI DX SI ALZA), QUINDI OLTRE $b=1$ INVERTE L'ANDAMENTO (IL RAMO DI SX SI ~~ABBASSA~~, IL RAMO DI DX SI ALZA




(b) $P(t; b^t)$

$f'(x) = b^x \ln b$

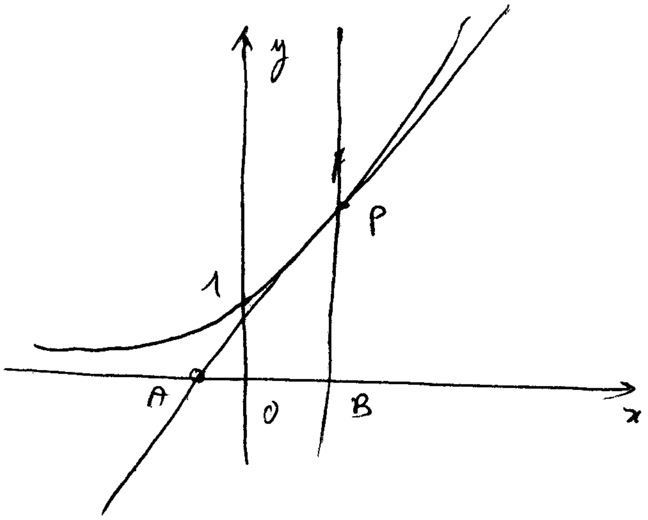
$m = f'(t) = b^t \ln b$

TG. IN P:

$$y - b^t = b^t \ln b\,(x - t)$$

INTERSECO CON L'ASSE $x$ E TROVO A:

$$y = 0 \rightarrow -b^t = b^t \ln b\,(x_A - t)$$




$-1 = \ln b\,(x-t)$

$x - t = -\frac{1}{\ln b}$

$x_A = t - \frac{1}{\ln b}$

NATURALMENTE $x_B = x_P = t$

QUINDI:

$\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left|t - t + \frac{1}{\ln b}\right| = \frac{1}{|\ln b|}$

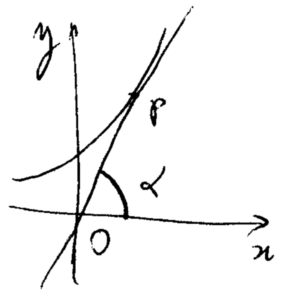
LA LUNGHEZZA DI $\overline{AB}$ È COSTANTE!

$\frac{1}{|\ln b|} = 1$ se $|\ln b| = 1$ cioè $\ln b = \pm 1$

$\ln b = 1$ se $\boxed{b = e}$

$\ln b = -1$ se $\boxed{b = 1/e}$

(c) $G_e = e^x$ $\quad P(t; e^t)$




$G_e' = e^x$

$y - e^t = e^t(x-t)$

$y = e^t x - te^t + e^t$

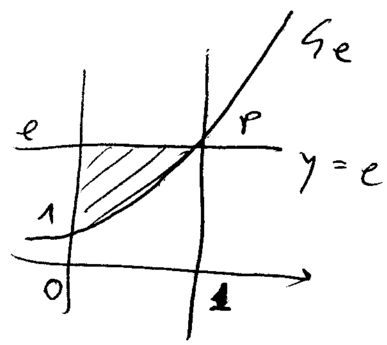
PASSA PER $O(0;0)$

$0 = -te^t + e^t = e^t(-t+1) \to t-1=0 \to t=+1$

$P(+1; e)$

$m = G_e' = e = \operatorname{tg}\alpha$

$\alpha = \operatorname{arctg} e = \boxed{1{,}2182829 \text{ rad}}$




(d) $e^x = e \to x = 1 \to P(1; e)$

$\mathcal{A} = \int_0^1 (e - e^x)\,dx = [ex - e^x]_0^1 =$

$= (e - e) - (0 - e^0) = \boxed{1}$

# QUESITI

① $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$

$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$

----

$p^{(n-1)}(x) = n(n-1) \dots 2\, a_n x + (n-1) \dots 2 \cdot 1$

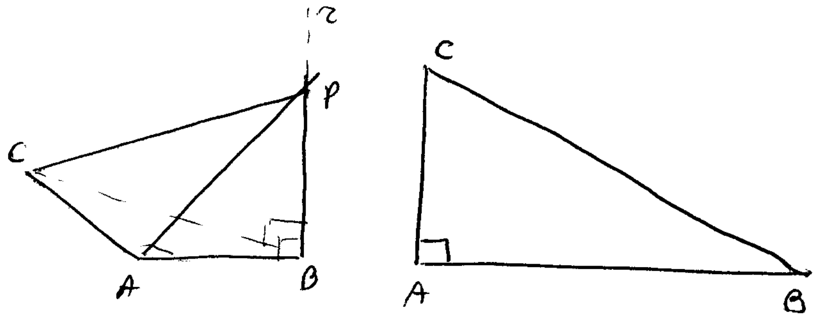
$p^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\, a_n$

② $\overset{\Delta}{ABC}$

$\overline{PB} \perp \pi(\overset{\Delta}{ABC})$

QUINDI $\overline{PB} \perp \overline{AB}$

$\overline{PB} \perp \overline{BC}$




SE DA UN PUNTO ESTERNO A UN PIANO MANDO LA $\perp$ AL PIANO E DAL PIEDE UNA $\perp$ A UNA RETTA DEL PIANO, IL PIANO DATO È $\perp$ AL PIANO DI QUESTE ULTIME DUE (TH. DELLE 3 PERPENDICOLARI)

DUNQUE $\hat{PAB}$ È PERPENDICOLARE AD $\overline{AC}$, E $\overset{\Delta}{PAC}$ È RETTANGOLO

③ $\gamma \quad f(x) = e^{3x} + 1$

$y - e^{3t} - 1 = 3e^{3t}(t-1)$

$x = t \rightarrow y = e^{3t} + 1$

$y' = 3e^{3x} \rightarrow m = 3e^{3t}$

$m = 2$ se $3e^{3t} = 2 \rightarrow e^{3t} = 2/3$

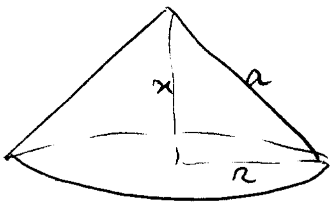
$3t = \ln 2/3$

$t = \boxed{\frac{1}{3} \ln 2/3 = -0{,}135}$

④ $\lim_{x \to \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 4 \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 4 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \boxed{4}$

$\left(\frac{1}{x} = t\right)$

⑤



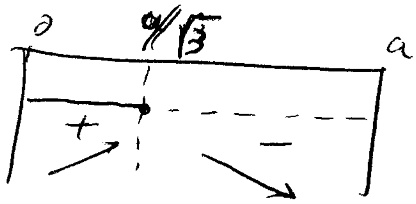

ALTEZZA $= x \qquad 0 < x < a$

RAGGIO $= \sqrt{a^2 - x^2}$

$V = \frac{1}{3} r^2 h \pi = \frac{1}{3} \pi (a^2 - x^2) x = \frac{1}{3} \pi (a^2 x - x^3)$

$V' = \frac{1}{3} \pi (a^2 - 3x^2) \geq 0 \longrightarrow 3x^2 \leq a^2$

$x^2 \le \frac{a^2}{3} \longrightarrow -\frac{a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$




PUNTO DI MASSIMO IN $x = \frac{a}{\sqrt{3}} \longrightarrow$ RAGGIO $= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$

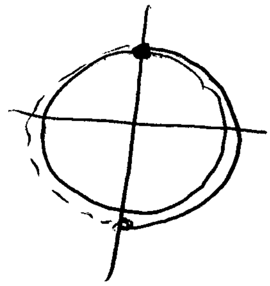
$$V_{MAX} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2}{3}a^2 \, \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a^3\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$a = 8dm \rightarrow V = \frac{2\cdot(8)^3\cdot 3{,}14\,dm^3}{9\cdot 1{,}73} = \boxed{206{,}37\,l}$$

$(1\,l = 1\,dm^3)$

(6) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ $\quad \cos x \ge 0$

C.E. $\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$



(7) $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4 & x \le 4 \\ kx^2 - 2x - 1 & x > 4 \end{cases}$

$h(4^-) = h(4^+)$

$3\cdot 16 - 11\cdot \; - 4 = 16k - 2\cdot 4 - 1$

$0 = 16k - 9$

$16k = 9$

$\boxed{k = \frac{9}{16}}$

(8) $n > 3$

$$\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3}$$

MA $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \rightarrow \binom{n}{1} - \binom{n}{2} = \binom{n}{2} - \binom{n}{3}$

$(n! \ne 0)$ $\quad \frac{\cancel{n!}}{(n-1)!\,1!} - \frac{\cancel{n!}}{(n-2)!\,2!} = \frac{\cancel{n!}}{(n-2)!\,2!} - \frac{\cancel{n!}}{(n-3)!\,3!}$

$$\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)!} - \frac{1}{2(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{2(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{6(n-3)!}$$

$$\frac{6 - 3(n-1)}{6(n-1)\cancel{(n-2)(n-3)!}} = \frac{3(n-1) - (n-1)(n-2)}{\cancel{6(n-1)(n-2)(n-3)!}}$$

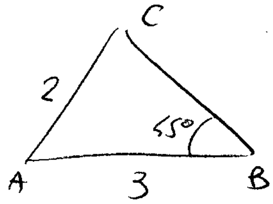
$6 - 3n + 3 = 3n - 3 - n^2 + n + 2n - 2$ 7

$n^2 - 9n + 14 = 0$

$n = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = $ 7 ; $\cancel{2}$ NON ACC.

$\boxed{n = 7}$

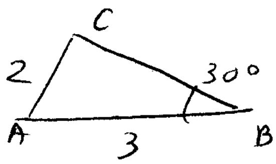
9 α) $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$, $A\hat{B}C = 45°$




TH. DEI SENI: $\frac{2}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{3}{\operatorname{sen}\gamma} \rightarrow \operatorname{sen}\gamma = \frac{3 \operatorname{sen} 45°}{2} = 1{,}06$

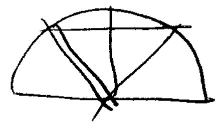
$\gamma$ NON ESISTE!

β) $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$, $A\hat{B}C = 30°$




TH. DEI SENI: $\frac{2}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{3}{\operatorname{sen}\gamma} \rightarrow \operatorname{sen}\gamma = \frac{3 \operatorname{sen} 30°}{2} = \frac{3}{4}$

DUE ANGOLI < 180° HANNO SEN $\gamma = 3/4$:



$\gamma_1 \cong 48°\ 35'\ 25''$

$\beta_1 = 30°$

$\alpha_1 = 180° - \beta_1 - \gamma_1 =$

$= 101°\ 14'\ 35''$

$\gamma_2 = 131°\ 24'\ 34''$

$\beta_2 = 30°$

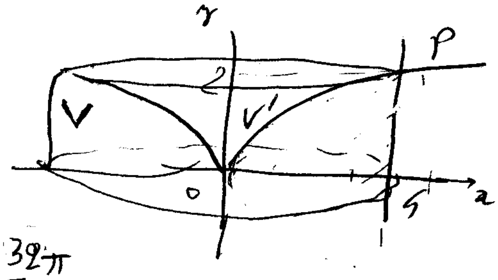
$\alpha_2 = 180° - \beta_2 - \gamma_2 =$

$= 18°\ 35'\ 26''$

$$\begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' - \\ 78°\ 35'\ 25'' = \\ \hline 101°\ 14'\ 35'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' \\ 161°\ 24'\ 35'' \\ \hline 18°\ 35'\ 26'' \end{array}$$

I TRIANGOLI SONO DUE!

10 $y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$ $P(4; +2)$




$V' = \pi \int_0^2 (g(y))^2\, dy = \pi \int_0^2 y^4\, dy = \left[\pi \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$

$V = 16\pi \cdot 2 - \frac{32}{5}\pi = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \boxed{\frac{128}{5}\pi}$