Esame di Stato - Matematica (1998-2008)

17 settembre 2008

1. **(Sessione Ordinaria, 1998) - Corso di Ordinamento**

   (a) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

   $$y = ax^3 + 3x + b$$

   dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$.

   i. determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo e uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti;

   ii. calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$;

   iii. controllato che la curva γ si ottiene per $a = \frac{1}{2}$, disegnarne l'andamento;

   iv. calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dall'asse x.

   (b) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva C di equazione:

   $$y = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

   i. Studiare e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$).

   ii. Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B.

   iii. Disegnare C'' nello stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C'.

   iv. Determinare l'angolo sotto cui C'' e C si secano in B.

   v. Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C''.

   (c) Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$.

   i. condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma con il cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t.

ii. Verificato che risulta:

$$V(x) = \frac{1}{2}\pi a^3(4\sin x + 3\cos x)$$

con x appartenente a un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.

iii. Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove k è un parametro reale assegnato.

iv. Completare la risoluzione dimostrando, col metodo preferito, che il volume V di un tronco di cono di raggi R e r e altezza h è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr).$$

2. **(Sessione Ordinaria, 1998) - PNI**

(a) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $A(-1;0)$ e $B(1;0)$.

Il candidato:

i. scriva l'equazione di Γ_1, luogo dei punti per cui è uguale a $2\sqrt{2}$ la somma delle distanze da A e B, e l'equazione di Γ_2, luogo dei punti peer cui è uguale a $\sqrt{2}$ la distanza da B;

ii. verifichi che Γ_1 e Γ_2 hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo;

iii. determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva Γ_1 rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi Γ_1 e di Γ_2 appartenenti al semipiano di equazione $y \geq 0$ e dai segmenti VW e $V'W'$, essendo V, V' e WW' i punti di intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con Γ_1 e con Γ_2 (V e W di ascissa positiva);

iv. considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione $f(x)$ che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per il punto $P(x;0)$, distinguendo le varie posizioni di P, e disegni la curva Λ di equazione $y = f(x)$;

v. dica che cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra Λ e l'asse delle ascisse.

(b) Sia dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases} .$$

Il candidato:

i. dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni;

ii. interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione;

iii. nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;

iv. in tale condizione, fissato $h = 1$, studi come varia l'area del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'ks$, la curva di equazione $s = s(k)$.

(c) Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 metri ed il diametro della sezione di 4 centimetri. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media $m_1 = 5$ cm e scarto standard $\sigma_1 = 4$ cm. Il diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente e con distribuzione normale di media $m_2 = 4$ cm e scarto standard $\sigma_2 = 0.8$ cm.

Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4.95 cm e 5.05 cm e la sua sezione tra 2.8 cm e 5.2 cm.

La tavola della funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente:

Ascissa: x	$F(x)$	Ascissa: x	$F(x)$
-1.50	0.067	0.95	0.829
-1.45	0.074	1.05	0.853
-1.35	0.089	1.15	0.875
-1.25	0.106	1.25	0.894
-1.15	0.125	1.35	0.912
-1.05	0.147	1.45	0.927
-0.95	0.171	1.50	0.933

Il candidato:

i. verifichi che la probabilità p di poter metter in vendita senza modifiche una generica barra prodotta è 0.69;

ii. indicata con f_n la frequenza relativa alle barre direttamente vendibili su n barre prodotte, esprima, in funzione di p, la numerosità n necessaria perché la probabilità che f_n disti da p più di 0.05 sia non superiore a 0.05;

iii. dato il valore di p rilevato al primo punto, se su 2000 barre prodotte 1000 risultano non direttamente vendibili, dica se si può sospettare che la macchina non funzioni più secondo lo standard riportato sopra, se, cioè il risultato ottenuto risulta a priori poco probabile (probabilità inferiore a 0.05) subordinatamente alle modalità di funzionamento della macchina, come indicato;

iv. descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità di ottenere la prima barra direttamente vendibile solo all'n-esima prova, al variare di p e di n, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

3. **(Sessione Suppletiva, 1998) - Corso di Ordinamento**

(a) Sia data la funzione $f(x) = (x+1)e^{1-x}$.

Il candidato:

i. studi la funzione $f(x)$;

ii. in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, disegni la curva C di equazione $y = f(x)$;

iii. determini l'area della regione finita di piano compresa tra la curva C, l'asse delle ascisse e le due rette parallele all'asse delle ordinate e passanti rispettivamente per il punto $A(x_0; f(x_0))$, essendo x_0 il valore di x in cui $f(x)$ assume valore estremo relativo, e per il punto $B(x_1, f(x_1))$, essendo x_1 il valore di x in cui $f(x)$ ha un flesso.

(b) Sia S una semisfera di centro O e raggio 1 e Γ e la sua circonferenza massima. Sulla semiretta di origine O, perpendicolare al piano Γ e che interseca S. Si consideri il punto B tale che $\overline{OB} = \sqrt{3}$.

Il candidato:

i. individui il punto C del segmento OB che sia il centro dell'ulteriore cerchio d'intersezione di S con il cono Σ di base Γ e vertice B;

ii. detto P un punto del segmento OC la cui distanza da O sia x, scriva in funzione di x i volumi dei coni di vertice O e di base rispettivamente Γ_1 e Γ_2, ottenuti dall'intersezione con S e con Σ del piano per P, perpendicolare a OC;

iii. considerata la corona circolare W delimitata da Γ_1 e Γ_2, determini il volume $V(x)$ del solido delimitato da W e dalle superficie laterali dei coni anzidetti;

iv. disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = V(x)$.

(c) In una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è inscritto un triangolo rettangolo ABC, retto in C ed avente il cateto CB uguale al doppio del cateto AC. Sia P un punto dell'arco di estremi A e B, che non contiene C.

Il candidato:

i. determini i cateti del triangolo ABC i valori di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$, essendo $\alpha = C\hat{A}B$;

ii. indicato con θ l'angolo $C\hat{A}P$, esprima in funzione di $x = \cot\theta$ il rapporto:

$$R(x) = \frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2};$$

iii. tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = R(x)$ e descriva l'andamento di $R(x)$;

iv. trovi i valori di x quando y assume il valore $\dfrac{1}{3}$.

4. **(Sessione Suppletiva, 1998) - PNI**

(a) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si considerino i punti $A(2;0)$ e $P(x;0)$.

Il candidato:

i. esprima in funzione di x le funzioni $s(x) = \overline{PO} + \overline{PA}$ e $d(x) = |\overline{PO} - \overline{PA}|$, distinguendo le posizioni occupate dal punto P;

ii. tacci le linee di equazione $y = s(x)$ e $y = d(x)$;

iii. tracci, quindi, la linea C di equazione $y = \dfrac{s(x)}{d(x)}$

iv. determini la misura degli angoli formati dalle rette tangenti a C nei suoi punti angolosi;

v. calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra C e la retta di equazione $y = 2$.

(b) Sia S una semisfera di centro O e raggio 1 e Γ la circonferenza massima. Sulla semiretta di origine O, perpendicolare al piano di Γ e che interseca S in A, si consideri il punto B tale che $\overline{OB} = \sqrt{3}$.

Il candidato:

i. individui il punto C del segmento OA, centro dell'ulteriore cerchio d'intersezione di S con il cono Σ di base Γ e vertice B;

ii. detto P un punto del segmento OA la cui distanza da O sia x, scriva in funzione di x i volumi dei coni di vertice O e di base rispettivamente i cerchi Γ_1 e Γ_2, determini il volume $V(x)$ del solido delimitato da W e delle superfici laterali dei coni andizetti;

iii. disegni in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $V = V(x)$.

(c) In una successione di prove bernoulliane, con probabilità p di successo in ogni prova, è possibile fissare il numero N delle prove e studiare la probabilità condizionata del numero dei successi K, che indichiamo con $P(K = k|N = n)$. É anche possibile fissare il numero K di successi che si desidera ottenere e studiare la probabilità condizionata del numero N di prove necessarie per ottenerli, che indichiamo con $P(N = n|K = k)$.

Il candidato:

i. fornisca la formula generale per il calcolo di $P(K = k|N = n)$ (distribuzione binomiale);

ii. fornisca la formula generale per il calcolo di $P(N = n|K = k)$;

iii. verifichi che comunque fissati N e K, risulta sempre $P(N = n|K = k) \leq P(K = k|N = n)$ e fornisca una giustificazione di ciò;

iv. descriva una procedura che consenta di calcolare $P(N = n|K = k)$ in funzione di p, N e K e la condifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

5. **(Sessione Ordinaria, 1999) - Corsi di Ordinamento**

(a) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

i. Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

- necessaria ma non sufficiente;
- sufficiente ma non necessaria;

- necessaria e sufficiente

per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

ii. Posto $f(x) = \dfrac{x^3}{ax+b}$, dove a, b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{27}{32}\right)$.

iii. Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnare l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

iv. Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e γ'.

v. Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

(b) In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r e una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $\dfrac{8}{3}r^2$.

Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

i. determinare l'equazione della circonferenza k;

ii. determinare l'equazione della parabola p;

iii. trovare le coordiante dei punti comuni a k e p;

iv. calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;

v. stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\dfrac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3} cm^2$.

(c) Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

i. Esprimere in funzione di x il rapporto:

$$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}.$$

ii. Studiare la funzione $f(x)$ ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnare il grafico in un piano cartesiano ai fini della risoluzione del punto c).

iii. Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.

iv. Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x + 1}.$$

v. Stabilire che risulta:

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

6. **(Sessione Ordinaria, 1999) - PNI**

(a) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x.$$

Siano A il punto dell'asse x di ascissa λ, con $\lambda < 0$, B il suo simmetrico rispetto ad O, e A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B.

Il candidato:

i. verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ, rispettivamente in A' e B', s'incontrano in un punto E dell'asse y;

ii. detti C e D i rispettivamente in A' e B', s'incontrano in un punto E dell'asse y;

iii. detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di a e b con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area di s del triangolo CED;

iv. studi la funzione $s(\lambda$ e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$;

v. detto λ_0 il valore di λ per cui s assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di a e b per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ, a_0 e b_0;

vi. osservato che, nell'ipotesi posta $\lambda <!$, esistono due valori λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CDE è equivalente al quadrato di lato OA, descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ_1 con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

(b) In un piano α è assegnato il triangolo ABC, retto in B, i cui cateti AB e BC misurano rispettivamente 4 e 3.

Si conduca per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui $VA = VB$.

Il candidato:

i. dimostri geometricamente o algebricamente che, come tutte le altre facce del tetraedro $VABC$, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$;

ii. calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;

iii. detto M il punto medio di VA e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V, esprima in funzione di x il volume v del tetraedro $MPQR$, essendo Q e R le rispettive intersezioni degli spigoli VB e VC con il piano β parallelo ad α e passante per P;

iv. studi come varia v al variare di P sul segmento VA, determinando in particolare la posizione $\overline{P}$ di P in cui il volume v assume valore massimo assoluto;

v. detto D il punto medio di VB ed E il punto di AC tale che $AE = AB$, determini la posizione $P*$ di P che rende minima la somma $DE+PE$ (si consiglia di far ruotare il triangolo VAB attorno ad AV nel piano del triangolo VAE, simmetricamente a quest'ultimo e considerare la somma $D'P + PE$, essendo D' il corrispondente di D nella suddetta rotazione).

(c) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono dati i punti $P(x;y), A(x';y'), B(x'';y''), P'(X;Y)$, legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x'' - y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases} \quad .$$

Il candidato:

i. dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3, rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;

ii. determini la trasformazione$T$ che fa passare da P a P'';

iii. studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determiandone, in particolare, gli eventuali punti uniti;

iv. considerati i punti $C(3;0), D(0;\sqrt{3}), E(0;-\sqrt{3})$ e detti γ la circonferenza per tali punti, a la retta CD, γ' ed a' i trasformati di γ e a mediante T, determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ' e a';

v. determini il perimetro delle stesse regioni.

7. **(Sessione Suppletiva, 1999) - Corso di Ordinamento**

(a) Data una semicirconferenza di centro O e di diametro $\overline{AB} = 2$, si assuma su di essa un punto C in modo che l'angolo $A\hat{O}C$ sia acuto. Indicata con ϕ l'ampiezza di tale angolo, siano:

- $x = \tan\dfrac{\phi}{2}$
- y= raggio della circonferenza tangente tanto del diametro quanto, nel punto C, alla semicirconferenza.

Dopo aver dimostrato che il centro di tale circonferenza appartiene al raggio OC, si studi e si rappresenti graficamente la funzione $y = f(x)$ senza tenere conto delle limitazioni di natura geometrica poste ad x dal problema.

(b) Si deve costruire un recipiente a forma di cilindro circolare retto che abbia una capacità di $16\pi cm^3$. Il candidato determini le dimensioni del recipiente che richiederanno la quantità minima di materiale. Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta.

Considerate infine le formule:

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \text{ e } S = \pi x^2$$

che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

(c) L'informazione che si ha della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ è tutta concentrata nel punto di ascissa $x = 5$ ed è:

$$f(5) = 0, f'(5) = -1, f''(5) = -\frac{1}{2}$$

- determinata la parabola e detti A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse x calcolare l'area del triangolo ABC ove con C si è denotato il punto d'incontro delle tangenti alla parabola in A e in B e stabilire il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base AB;
- stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree prima considerate per effetto della rotazione completa attorno all'asse x.

8. **(Sessione Suppletiva, 1999) - PNI**

(a) Data la funzione $y = f(x)$ con $f(x) = \dfrac{4}{x+k}$ e la funzione $y = g(x)$ con $g(x) = x^2 - hx + 4$, ove h e k sono due numeri reali.

i. verificare per quali valori di k ed h è:

$$f(1) = g(1), f'(1) = g'(1);$$

ii. tracciare in uno stesso piano di assi cartesiani i grafici delle funzioni $y_1 = \dfrac{4}{x+1}$ e $y_2 = x^2 - 3x + 4$;

iii. calcolare l'area della superficie delimitata dalle curve rappresentanti le due funzioni y_1 e y_2.

(b) In una semicirconferenza è inscritto un triangolo rettangolo ABC di base $\overline{AB} = 2$. Si tracci la semiretta parallela alla base AB passante per C e che non interseca la circonferenza. Sia D il punto su tale semiretta per cui $\overline{CD} = \overline{AC}$.

i. Trovare la funzione $f(x)$ che esprime la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD in funzione dell'angolo $B\hat{A}C = x$.

ii. Rappresentare il grafico della funzione $y = f(x)$ con

$$y = \sin(2x)(1 - \cos x).$$

Determinare per quale valore dell'angolo $B\hat{A}C = x$ la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD risulta massima.

iii. Calcolare l'area delimitata dalla funzione $f(x)$ e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(c) Una ditta dispone di 10 linee telefoniche. La probabilità, in un istante qualsiasi, che una data linea si occupata è $\dfrac{1}{3}$. Determinato il numero medio di linee telefoniche libere, calcolare per ogni istante - con due cifre significative - la probabilità che:

i. tutte le linee siano occupate;
ii. almeno una linea sia libera;
iii. almeno una linea sia occupata;
iv. esattamente due linee siano libere.

9. **(Sessione Ordinaria, 2000) - Corso di Ordinamento**

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

(a) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$\int_0^1 f(x)dx = 2 \text{ e } \int_0^2 f(x)dx = -5 \text{ [1]}.$$

i. Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \int_0^1 f(2x)dx,$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

ii. Posto:

$$f(x) = ax^3 + bx + c,$$

dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].

iii. Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

iv. Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata - 4 .

v. Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

(b) Il rettangolo $ABCD$ è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

i. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

ii. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base $ABCD$.

iii. Condotto il piano a parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che a sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.

iv. Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano a divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$.

(c) Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

i. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

ii. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

10. **(Sessione Ordinaria, 2000) - PNI**

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

(a) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:

$$f(x_0) > 0, f'(x_0) > 0, f''(x_0) = 0,$$

dove x_0 è un particolare valore reale.

i. Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0.

ii. Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$, di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 0.$$

iii. Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione $y = x + 1$.
iv. A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto ad x, della funzione x_n, dove n è un intero qualsiasi non nullo.

(b) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti:$A(0, 2), B(1, 1), C(1, 0)$.
i. Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.
ii. Determinare le equazioni dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.
iii. Calcolare l'area del triangolo CAA', dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità α.
iv. Stabilire se l'affinità α ha altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite.
v. Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ.

(c) Assegnata la funzione:

$$f(x) = a \log^2 x + b \log x$$

dove il logaritmo si intende in base e, il candidato:
i. determini per quali valori di a e b la $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{4}\right)$;
ii. disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di a e di b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x.
iii. Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte, esca per tre volte lo stesso numero.

11. **(Sessione Ordinaria, 2000) - Autonomia**

(a) Il candidato dopo aver dato una giustificazione della formula d'integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \ (1)$$

dica cosa c'è di sbagliato nel ragionamento seguente:
sia da calcolare

$$\int \frac{1}{x} dx$$

applicando la (1) con $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g'(x) = 1$, otteniamo:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot 1 dx = \frac{1}{x} \cdot x - \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot x dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

da cui, eliminando $\int \dfrac{1}{x} dx$ da ambo i membri, segue: 0=1.
Successivamente applichi la (1) per calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 e^x (x^2 + x + 1) dx.$$

(b) Il candidato affronti le seguenti questioni:

- fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.
- dopo averlo esposto applicare il teorema di de L'Hôpital per dimostrare che, per n finito, $n \in N$, si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{2^n} = 0$$

;

- esporre una strategia numerica per il calcolo approssimato di $\log 2$.

(c) Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) si consideri la curva γ di equazione:

$$y = a \sin^2 x + b \sin x - \frac{5}{2}.$$

- Si determinino i coefficienti a e b affinché γ abbia un flesso nel punto $(\frac{\pi}{6}, 0)$;
- si disegni il grafico della curva, per i valori di a e di b così trovati, nell'intervallo $[0, 2\pi]$;
- si determini l'area della regione limitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette: $x = \dfrac{\pi}{6}$ e $x = \dfrac{5\pi}{6}$.
Infine, si esponga un algoritmo per il calcolo approssimato di π.

12. **(Sessione Suppletiva, 2000) - Corso di Ordinamento**

(a) Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento AB, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:

   i. le coordinate di A, B e C;
   ii. l'equazione della parabola;
   iii. l'equazione del cerchio inscritto nel triangolo ABC.

(b) Il candidato:

- illustri il teorema di de L'Hôpital e lo applichi per dimostrare che :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{e^4} = 0;$$

- determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:

$$\int_0^1 e^{mx+n} dx = \frac{e^x}{m}$$

  e che l'integrale fra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;
- interpreti geometricamente la questione posta sopra.

(c) Si consideri la successione di termine generale: $a_n = \dfrac{f(n)}{3^n}$, dove:

$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

   i. Dimostrare che $f(n) = 2^n$.
   ii. Determinare il più piccolo valore di n per cui risulta: $a_n < 10^{-10}$.
   iii. Spiegare perché, se n è dispari, risulta:

$$f(n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{\frac{(n-1)}{2}}\right],$$

   fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula cui si fa ricorso. Scrivere un'espressione equivalente di $f(n)$ quando n è pari.

iv. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.

v. Esiste

$$\lim_{n\to 10^{1}0} a_n?$$

Motivare esaurientemente la risposta.

13. **(Sessione Suppletiva, 2000)- PNI**

(a) È assegnata la curva γ di equazione $y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ dove a è una costante positiva.

Il candidato:

i. studi e disegni il grafico di γ;
ii. verifichi in particolare che essa ammette due punti di flesso F_1 e F_2 di ascisse rispettive $x_1 = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$
iii. fornisca col metodo dei trapezi una stima dell'area della regione del piano delimitata dal grafico di γ sull'intervallo di estremi x_1 e x_2 e dal segmento F_1F_2;
iv. dica se il risultato ottenuto rappresenti una stima per difetto o per eccesso del risultato esatto;
v. illustri la relazione che intercorre tra γ e la curva normale di Gauss utilizzata nella statistica.

(b) Il triangolo ABC, rettangolo e non isoscele, è la base di una piramide di altezza $3a\sqrt[3]{2}$.

Le misure dei suoi cateti sono date da due delle tre radici dell'equazione:

$$4x^3 - 11ax^2 + 10a^2x - 3a^3 = 0.$$

Il candidato:

- determini la distanza k di un piano a dal vertice della piramide sapendo che a è parallelo al piano del triangolo ABC e taglia la piramide in due parti equivalenti.

- determini k nel caso in cui il triangolo ABC ha un cateto che misura a e l'altro cateto è una soluzione, approssimata con due cifre significative, dell'equazione:

$$x^3 + 4a^2x - 2a^3 = 0.$$

- esponga il procedimento utilizzato per il calcolo approssimato della radice dell'equazione proposta.

(c) Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione a caso di 5 palline, una dopo l'altra, senza reimbussolamento delle palline estratte, da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90, aventi tutte le stesse possibilità di uscita (gioco del Lotto).

i. Dire se è più probabile che, prescindendo dall'ordine di uscita, esca:
- la cinquina di numeri successivi 1,2,3,4,5 o la cinquina di numeri non successivi 2,3,5,8,13;
- una qualunque cinquina di numeri successivi o una qualunque cinquina di numeri non successivi.

ii. Prese in esame le due seguenti proposizioni:
A: *La probabilità che il 2° numero estratto sarà il 90 è 1/89*,
B: *La probabilità che nei 5 numeri estratti ci sarà il 90 è 5/90*,
stabilire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no e fornire esaurienti spiegazioni:
(1) $A \rightarrow B$, (2) $B \rightarrow A$, (3)$\overline{A} \rightarrow \overline{B}$, (4) $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$.

iii. Supposto di puntare una determinata somma sull'uscita dei tre numeri 14, 8, 42 sulla Ruota di Napoli, calcolare la probabilità di vincita (fare un terno al Lotto). Se il gioco fosse equo e la puntata fosse di 5 Euro, quanto dovrebbe pagare lo Stato in caso di vincita del giocatore?

iv. Supponendo di ripetere n volte l'esperimento considerato, calcolare la probabilità che il 90 esca, tra i 5 numeri estratti: - al più 5 volte; - per la prima volta proprio alla n-esima estrazione. Qual è il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera 10^{-10}?

14. **(Sessione Ordinaria, 2001) - Istituto Magistrale**

(a) La misura, in decimetri, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell'equazione:

$$(x - 1)^3 + x^2 = x(x - 1)^2 + 4.$$

Nella sfera sono inscritti due coni circolari retti aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto $\frac{3}{4}$.

Il candidato calcoli:

i. il rapporto tra i volumi dei due coni;
ii. la misura del raggio della base comune dei coni.
iii. Il peso, approssimato ai grammi, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0,82.

(b) Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

i. Se a e b sono numeri diversi da zero e diversi tra loro, si ha:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2(1).$$
Come va corretta la (1) se si elimina la condizione per a e b di essere *diversi tra loro*?
ii. Il numero decimale periodico misto $1.2\overline{3}$ (periodo 3) ha come frazione generatrice $\dfrac{118}{99}$.
iii. Un numero di tre cifre tutte uguali è divisibile per 37.

15. **(Sessione Ordinaria, 2001) - Istituto Magistrale PNI**

Il candidato risolva le seguenti questioni:

(a) Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $\overline{AB} = 2\overline{AC}$, $\overline{BC} = a$, essendo a una lunghezza nota.

i. Stabilire se la bisettrice AD e la mediana CE del triangolo sono perpendicolari o no e darne esauriente spiegazione.
ii. Dopo aver riferito il piano del triangolo ABC ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei punti A, B, C e del punto in cui si secano le rette AD e CE.
iii. Preso un punto F sulla retta condotta per E perpendicolarmente al piano del triangolo ABC in modo che sia $\overline{EF} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$, calcolare la distanza del punto A dal piano BCF.
iv. Dell'angolo formato dai due piani BCF e ABC calcolare l'ampiezza espressa in gradi sessagesimali e approssimata a meno di un grado.

(b) Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri o falsi motivando esaurientemente ogni risposta:

i. Posto che a sia un numero reale qualsiasi, risulta: $\sqrt{a^2+2a+1} = a+1$.

ii. Risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = 0.$$

iii. Si considera l'esperimento del lancio di una moneta T̈esta-Croce c̈on le due facce che hanno le stesse possibilità di uscita. La probabilità che in 4 lanci esca T̈esta äl più due volte è minore di quella che esca T̈esta älmeno due volte.

16. **(Sessione Ordinaria - 2001) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

(a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

(b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.

(c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate (1,1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

(d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

(e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto 1), risulta tangente alla circonferenza k.

PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.

(b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a, \overline{BC} = 15a$ verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

(c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto 2), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

(d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

QUESTIONARIO

(a) Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta .

(b) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(c) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

(d) Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

(e) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

(f) Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

(g) Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

a) area massima e perimetro massimo;

b) area massima e perimetro minimo;

c) area minima e perimetro massimo;

d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

(h) Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

(i) Il limite della funzione $\dfrac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \to +\infty$,

a) è uguale a 0;

b) è uguale ad 1;

c) è un valore diverso dai due precedenti;

d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

(j) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

17. **(Sessione Ordinaria, 2001) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.

Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

(a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che

$$\frac{PA}{PB} = k$$

(k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta.

(b) Si determini il luogo geometrico g dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

(c) posto X, appartenente a g, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con

$$f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$$

e $x = \tan\alpha$.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a\log(x + b),$$

con a e b diversi da zero.

(a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva G grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;

(b) si studi e si disegni G;

(c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di G con l'asse x;

(d) si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta $y = y(1)$;

(e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a\log(x+b)|.$$

QUESTIONARIO

(a) Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.

(b) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0.$$

(c) Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

(d) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?.

(e) Calcolare l'integrale $\int \frac{\log x}{x} dx$.

(f) Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

(g) Verificato che l'equazione $x - e^x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

(h) Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

(i) Spiegare il significato di sistema assiomatico con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

(j) Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, se è vero che:
se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h.

18. **(Sessione Ordinaria, 2001) - Sperimentazione autonoma 1**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m| - m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

(a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m.

(b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

(c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m = 2$.

(d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

PROBLEMA 2

È dato il rettangolo $ABCD$ i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

(a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

(b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\dfrac{5}{4}a$.

(c) Calcolare l'area del pentagono $ABCED$.

(d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

(e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO

(a) Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta:

Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$.

(b) Il limite della funzione $\dfrac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a $+\infty$:

A) è uguale a 0;

B) è uguale a 1;

C) è uguale a $+\infty$;

D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.

(d) Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\pi} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

(e) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$

Tale luogo è costituito da:

A) un punto;

B) due punti;

C) una retta;

D) due rette;

E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(f) Nello spazio ordinario sono date tre rette a, b, c, delle quali si sa soltanto che c è perpendicolare sia alla retta a che alla retta b. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette a, b.

(g) Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:

A: 'è escluso che l'affinità sia una rotazione',

B: 'l'affinità può essere una similitudine',

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

(h) Considerata l'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = 2x + 3y \\ Y = -3x + 2y \end{cases}$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

(i) Da un sacchetto contenente i 90 numeri della Tombola si estraggono 4 numeri a caso. Considerata la proposizione:

La probabilità che fra di essi ci siano i numeri '1' e '90' è $\dfrac{2}{90}$,

dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(j) Due giocatori A e B giocano a TESTA-CROCE (le due facce della moneta hanno le stesse probabilità di uscita) con la seguente regola:

'Uno dei due giocatori lancia e vince se viene TESTA altrimenti il gioco passa all'altro giocatore; il quale lancia a sua volta e vince se viene TESTA altrimenti il gioco ritorna al primo; e così via'.

Calcolare quali probabilità ha il giocatore A di vincere sia nel caso in cui egli inizia a lanciare sia nel caso in cui a lanciare per primo sia B.

19. **(Sessione Ordinaria, 2001) - Sperimentazione autonoma 2**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m|-m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

(a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m.

(b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

(c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m = 2$.

(d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

PROBLEMA 2

È dato il rettangolo $ABCD$ i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

(a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

(b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

(c) Calcolare l'area del pentagono $ABCED$.

(d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

(e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO

(a) Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta:
Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$.

(b) Il limite della funzione $\dfrac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a $+\infty$:
A) è uguale a 0;
B) è uguale a 1;
C) è uguale a $+\infty$;
D) non esiste.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.

(d) Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

(e) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:
$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$
Tale luogo è costituito da:
A) un punto;
B) due punti;
C) una retta;
D) due rette;
E) una figura diversa dalle precedenti.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(f) Calcolare la derivata della funzione $\cos 2x$ ricorrendo alla definizione di derivata.

(g) Il teorema di Lagrange afferma che:
Se $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b) allora esiste almeno un punto c dell'intervallo (a,b) tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \ \textit{[1]}\,''.$$

Fornire un'interpretazione geometrica del teorema e, sempre con ricorso all'interpretazione geometrica, far vedere che, se viene meno la condizione della derivabilità di $f(x)$ nell'intervallo (a,b) allora può non esistere alcun punto c dell'intervallo (a, b) per il quale sussista la [1].

(h) Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e, risulta $\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 1} = x + 1$ per tutti e soli gli x reali tali che:

$$A)x \geq 0; B)x \geq 1; C)x \geq e; D)x \geq \frac{1}{e}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(i) La base maggiore, la base minore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: 10 cm , 8 cm , 30 cm . Dire se il trapezio è circoscrittibile ad un cerchio o se è inscrittibile in un cerchio e giustificare le risposte.

(j) In un piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali, sono assegnate una retta a di coefficiente angolare 2 ed una retta b di coefficiente angolare -2. Calcolare il seno dell'angolo orientato (a,b).

20. **(Sessione Ordinaria, 2001) - Sperimentazione autonoma 3**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m|-m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

(a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m.

(b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

(c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m = 2$.

(d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

PROBLEMA 2

È dato il rettangolo $ABCD$ i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

(a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

(b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

(c) Calcolare l'area del pentagono $ABCED$.

(d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

(e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO

(a) Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta:
Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$.

(b) Il limite della funzione $\dfrac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a $+\infty$:

A) è uguale a 0;

B) è uguale a 1;

C) è uguale a $+\infty$;

D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.

(d) Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

(e) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$

Tale luogo è costituito da:

A) un punto;

B) due punti;

C) una retta;

D) due rette;

E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(f) Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:

A: *è escluso che l'affinità sia una rotazione*,

B: *l'affinità può essere una similitudine*,

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

(g) Considerata l'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = 2x + 3y \\ Y = -3x + 2y \end{cases}$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

(h) Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e, risulta $\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 1} = x + 1$ per tutti e soli gli x reali tali che:

$$A)x \geq 0; B)x \geq 1; C)x \geq e; D)x \geq \frac{1}{e}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(i) Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Calcolare a_70 e descrivere un algoritmo che generi i primi 70 numeri della successione e li comunichi sotto forma di matrice di 7 righe e 10 colonne.

(j) Considerata l'equazione in x:

$x^3 + x - 3 = 0,$

spiegare perché ammette una soluzione reale ed una soltanto e scrivere un algoritmo che permetta di calcolarne un valore approssimato a meno di $\frac{1}{100}$.

21. **(Sessione Ordinaria, 2001) - Scuole italiane all'estero - America Latina**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

(a) Determinare le equazioni della retta t tangente alla parabola nel suo punto C di ascissa 0 e la retta s perpendicolare alla retta t e tangente alla parabola medesima.

(b) Dopo aver controllato che la retta s e la parabola si toccano nel punto $A(2,1)$, trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto A e tangenti alla retta t.

(c) Indicata con k la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con p, oltre ad A, e detto B il punto in cui questa circonferenza tocca la retta t, calcolare l'area della porzione finita di piano delimitata dal segmento BC, dal minore degli archi AB della circonferenza k e dall'arco AC della parabola p.

(d) Chiamata r la retta tangente alla circonferenza k e strettamente parallela alla retta t e considerato il segmento parabolico che tale retta r individua sulla parabola p, calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

PROBLEMA 2

Una piramide di vertice V ha per base il triangolo ABC rettangolo in B. Lo spigolo VA è perpendicolare al piano della base e il piano della faccia VBC forma con lo stesso piano di

base un angolo di 60°. Inoltre lo spigolo BC è lungo $\frac{5}{2}a$, dove a è una lunghezza data, e il volume della piramide è uguale a $\frac{5}{\sqrt{3}}a^3$.

(a) Calcolare la lunghezza dello spigolo VA.

(b) Controllato che essa è $2a\sqrt{3}$, calcolare la distanza del vertice B dal piano della faccia VAC.

(c) Determinare il prisma retto, avente il volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABC della piramide.

(d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area totale.

QUESTIONARIO

(a) S_n rappresenta la somma di n numeri in progressione geometrica di ragione $\frac{3}{7}$ e primo termine $\frac{7}{3}$. Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

(b) Di due rette a, b dello spazio ordinario si sa soltanto che sono perpendicolari ad una stessa retta c. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette a, b.

(c) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali, le due rette a, b hanno coefficienti angolari rispettivamente -1 e $\frac{1}{2}$. Calcolare il coseno dell'angolo orientato (a, b).

(d) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$2xy - (k-1)x + 4y - 2k + 1 = 0,$$

dove k è un parametro reale.
Determinare per quali valori di k il luogo assegnato è:
a) un'iperbole;
b) una coppia di rette.

(e) Determinare una primitiva della funzione $\dfrac{\ln x}{x}$, essendo $\ln x$ il logaritmo naturale di x.

(f) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, dimostrare la formula che fornisce la derivata, rispetto ad x, della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$ facendo ricorso alla definizione di derivata.

(g) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x) tale che:

$$f(x) = \int_0^x te^t dt, \text{ con } x > 0,$$

dove e è il numero di Nepero.

22. **(Sessione Suppletiva, 2001) - Istituto Magistrale**

Il candidato risolva le seguenti questioni.

1. Nel trapezio $ABCD$ gli angoli di vertici A e B, adiacenti alla base maggiore AB, hanno ampiezze rispettivamente di 45° e 120°. Inoltre l'altezza del trapezio e la base minore hanno la stessa lunghezza a.

(a) Calcolare il perimetro del trapezio.

(b) Indicata con E la proiezione ortogonale del vertice D sulla base maggiore, si prenda un punto H sulla retta condotta per E perpendicolarmente al piano del trapezio. Sapendo che il volume della piramide avente per vertice il punto H e per base il trapezio è $\frac{13}{12}a^3$, calcolare:

   i. l'altezza della piramide;
   ii. la distanza del vertice H dalla retta DC;
   iii. la distanza del vertice H dalla retta BC.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri o falsi motivando esaurientemente ogni risposta:

(a) Se è: $1.7 \leq a \leq 7.1$ e $-4.3 \leq b \leq -3.4$, dove a, b sono numeri razionali, si deduce che deve essere: $6.0 \leq a - b \leq 10.5$.

(b) Comunque si scelgano i numeri naturali a, b, con $b \neq 0$, risulta: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+1}{b+1}$.

(c) Di un trapezio isoscele si sa soltanto che la base maggiore è lunga il doppio della minore, ma ciò è sufficiente per determinare il rapporto fra i volumi dei solidi generati dal trapezio quando ruota di un giro completo dapprima attorno alla base minore e poi attorno alla base maggiore.

23. **(Sessione Suppletiva, 2001) - Istituto Magistrale - PNI**

1. È assegnato un cono equilatero (diametro = apotema) di altezza $\sqrt{3}$ decimetri. Si conduca un piano parallelo alla base del cono e se ne denoti con γ la circonferenza intersezione.

Si consideri il cilindro retto C ottenuto proiettando γ sulla base del cono e si consideri altresì, esternamente al cilindro, la sfera S tangente al piano di γ e alle generatrici del cono.

(a) Si determini l'altezza x del cilindro che ne rende massima la superficie laterale;

(b) in corrispondenza del valore ottenuto si determinino il raggio di S, approssimato ai millimetri, e il rapporto tra i volumi di S e di C.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

(a) Il numero decimale periodico misto $3.2\overline{43}$ ha $\dfrac{3871}{990}$ come frazione generatrice.
(b) Un insieme è infinito se è equipotente ad una sua parte propria.
(c) In matematica dire concetti primitivi è la stessa cosa che dire assiomi.

24. **(Sessione Suppletiva, 2001) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

(a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
(b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m=1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
(c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

PROBLEMA 2

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo j tale che $\sin j = \frac{12}{13}$.

(a) Calcolare l'altezza della piramide.
(b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

(c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano a che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di a dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

(d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

QUESTIONARIO

(a) Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.

B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

a) A vera - B vera; b) A vera - B falsa; c) A falsa - B vera; d) A falsa - B falsa.

(b) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

(c) Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576.$$

(d) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che: $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$.

Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

(e) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

(f) Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

(g) Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

(h) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

(i) Calcolare la derivata della funzione $\sin 2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

(j) Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

a) necessaria e sufficiente;

b) necessaria ma non sufficiente;

c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

25. **(Sessione Suppletiva, 2001) - PNI**

PROBLEMA 1

Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

(a) Si esprima, in funzione di k, il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo;

(b) si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo;

(c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in 2), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a ABC;

(d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

PROBLEMA 2

Un'industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto.

Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

(a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

(b) Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

   i. nel caso di cui al punto 1);

   ii. nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia sezione aurea dell'altezza.

QUESTIONARIO

(a) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange illustrandone il legame con il teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

(b) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la f(x)?

(c) Dire qual è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^x$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

(d) Calcolare, integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsin x dx.$$

(e) Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di concetto primitivo e di assioma.

(f) Nell'insieme delle cifre $1, 2, 3, \ldots, 9$ se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

(g) Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

(h) Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

(i) Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo.

Ovvero, con i versi di Dante:

$\cdots$ *se del mezzo cerchio far si puote*

triangol sì ch' un retto non avesse.

(Paradiso, XIII, 101-102)

26. **(Sessione Suppletiva, 2001) - Scuole italiane all'estero - America Latina**

PROBLEMA 1

Assegnato il segmento AB di lunghezza 1, si disegni la circonferenza avente il centro C sull'asse di AB e passante per A e per B. In tale contesto, denotata con P la proiezione ortogonale di B sulla retta AC:

(a) si esprima la somma $BC^2 + BP^2$ in funzione dell'angolo $B\hat{A}C = x$;

(b) si determini il valore minimo assunto da tale somma;

(c) si stabilisca per quali valori di x si ha $\overline{BC}^2 + \overline{BP}^2 = \dfrac{7}{4}$;

(d) fissato $x = 30°$ si calcoli il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa del triangolo BCP attorno alla retta AC, presa come asse di rotazione.

PROBLEMA 2

Un foglio di latta ha le dimensioni di un quadrato di lato a.

Da esso si ritagliano quattro quadrati uguali (ciascuno avente un angolo coincidente con un angolo del foglio) in modo da ottenere, piegando ad angolo retto i lembi rimasti, una scatola senza coperchio. Trascurando lo spessore del foglio, si determini:

(a) il lato x del quadrato da ritagliare affinché la scatola abbia volume massimo;

(b) il valore di a, espresso in centimetri, affinché tale volume massimo abbia la capacità di 4 litri;

(c) Il raggio, in funzione di a, che deve avere una sfera per essere circoscritta alla scatola di volume massimo;

QUESTIONARIO

(a) Dimostrare che se un polinomio $p(x)$ è divisibile per $(x-a)^2$ allora $p'(x)$ è divisibile per $(x-a)$.

(b) Senza usare il simbolo del valore assoluto, si descriva il dominio di x per cui $|x+1| < 4$.

(c) Si dimostri che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

(d) L'equazione $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ esprime il teorema del valore medio o di Lagrange. Determinare c quando $f(x) = \sqrt{x-1}$, $a = 1eb = 3$.

(e) Si trovi la curva il cui coefficiente angolare nel punto (x, y) è $3x^2$ e che deve passare per il punto (1,-1).

(f) A partire dalla definizione di logaritmo, dimostrare che: $\log_a b \times \log_b a = 1$ ove a e b sono due numeri positivi diversi da 1.

(g) Quale è la lunghezza di un arco di un cerchio di raggio 10m se l'angolo al centro che lo sottende misura $\frac{4\pi}{5}$? E se l'angolo misura 110°?

(h) Cosa si intende per funzione periodica? Quale è il periodo di

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1?$$

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a quattro domande scelte all'interno del questionario.

27. **(Sessione Suppletiva, 2001) - Sperimentazioni autonome**

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), si consideri il luogo geometrico γ dei punti P che vedono il segmento di estremi $A(0, 1)$ e $B(2, 1)$ sotto un angolo $A\hat{P}B$ di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ e se ne disegni il grafico.

Nel semipiano delle ordinate $y > 1$ si tracci la retta $y = k$, se ne indichino con C e D le eventuali intersezioni con γ e con C' e D' le loro proiezioni ortogonali su AB. Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

(a) il lato obliquo del trapezio isoscele $ABDC$;

(b) la diagonale del rettangolo $CDD'C'$;

(c) il cilindro generato dalla rotazione di $CDD'C'$ attorno all'asse del segmento AB.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), si consideri la funzione:

$$y = \frac{x^3 + a}{(x + b)^2}.$$

(a) si determinino a e b in modo che il grafico della curva g che ne risulta passi per il punto $P(2, 0)$ e abbia per asintoto la retta ;

(b) si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo t;

(c) si determini l'angolo α che t forma con la tangente a g nel punto di intersezione tra g e t;

(d) si tracci il grafico di:

$$y = \frac{|x^3 + a}{(x + b)^2}.$$

QUESTIONARIO

(a) Il rapporto delle aree laterali di due coni aventi basi uguali è uguale al rapporto degli apotemi mentre il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto delle altezze.

(b) Verificare, ricorrendo direttamente alla definizione, che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

(c) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange e utilizzarlo per dimostrare che:

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|.$$

(d) Di una funzione $f(x)$ si sa che: $f(0) = \dfrac{1}{\log^2 2}$, $f'(0) = 0$ e che ha derivata seconda uguale a $2x$. Si può dire quanto vale $f(x)$?

(e) Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = 2 \arcsin x - \arccos(1 - 2x^2).$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

(f) Dimostrare che:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

(g) Calcolare, con uno dei metodi numerici studiati, un valore approssimato della radice dell'equazione:

$$x - \log(2 - x) = 0.$$

(h) Tenuto conto che è:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

calcolare π con 3 cifre decimali esatte utilizzando una formula d'integrazione approssimata.

(i) Tra 15 videogiochi di cui 5 difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che

a) nessuno dei tre sia difettoso;

b) almeno uno dei tre non sia difettoso

(j) Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Dire come variano il suo volume e l'area della sua superficie.

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

28. **(Sessione Ordinaria, 2002) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3}.$$

(a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

(b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1.

(N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari).

(c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

(d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

(e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1]\ a + 2x, a - x, 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

(a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

(b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

(c) Verificato che per $x = \dfrac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

(d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto 3), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO

(a) Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

1item Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\dfrac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\dfrac{V'}{V''}$.

(b) Considerati i numeri reali a, b, c, d - comunque scelti - se $a > b$ e $c > d$ allora:

A) $a + d > b + c$;

B) $a - d > b - c$;

C) $ad > bc$;

D) $\dfrac{a}{d} > \dfrac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

(c) Si consideri la seguente proposizione:

La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica.

Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

(d) Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

(e) Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x-1)^7(4-2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

(f) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x) tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt, \text{ con } x > 0.$$

(g) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1,3] e derivabile nell'intervallo aperto (1,3). Si sa che f(1) = 1 e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo (1,3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

(h) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:
A) un punto;
B) due punti;
C) infiniti punti;
D) nessun punto.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(i) La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)dx = a, \int_0^6 f(x)dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)dx = \ln 2 \text{ e } \int_1^3 f(2x)dx = ln4.$$

29. **(Sessione Ordinaria, 2002) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale a non nullo.

Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y):

(a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;

(b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x, y)$ che soddisfano al problema;

(c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di g rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;

(d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;

(e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

PROBLEMA 2

I raggi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

(a) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) la lunghezza dell'arco AB al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';

(b) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';

(c) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

QUESTIONARIO

(a) Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

(b) Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610 - 1685), amico di Blaise Pascal:

giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?

(c) Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

(d) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

(e) Cosa si intende per funzione periodica? Quale è il periodo di $f(x) = -\sin\frac{\pi x}{3}$. Quale quello di $\sin 2x$?

(f) Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ $(p, q \in R)$, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

(g) Data la funzione $f(x) = e^x - \sin x - 3x$ calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con
$0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

(h) Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

(i) Trovare $f(4)$ sapendo che
$$\int_0^x f(t)dt = x\cos \pi x.$$

(j) Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

30. **(Sessione Ordinaria, 2002) - Sperimentazione autonoma 1**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che AC e BC sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa AB e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\hat{C}P$.

(a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

(b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.

(c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di DC.

(d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (Oxy), trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.

(e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.

(f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = kx^3 - (2-k)x^2 - (3-2k)x + 2,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

(a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

(b) Indicata con γ quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che γ ha un centro di simmetria.

(c) Dimostrare che la curva γ interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A.

(d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

(a) Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A' e B'. Stabilire se le rette AB e $A'B'$ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(b) Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

(c) In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0,$$

dove k è un parametro reale.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui il luogo è costituito da:

A) un punto;

B) due punti;

C) infiniti punti;

D) nessun punto.

(d) Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.

(e) Si considerino i numeri: $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$. Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

(f) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t} dt,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(g) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + (2 \cdot 2^{n-1}) + (2 \cdots 2^n),$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

(h) I numeri reali a, b sono tali che:
$4.3 < a < 5.2$ e $-1.7 < b < -1.5$.
Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(i) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua e positiva nell'intervallo $a \leq x \leq b$, descrivere un algoritmo che calcoli un valore approssimato a meno di 10^{-3} dell'area del trapezoide:

$$T = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

(j) Si consideri la seguente equazione in x:

$$2x + \ln x = 0.$$

Dimostrare, col metodo preferito, che ammette una soluzione reale ed una soltanto e descrivere un algoritmo che ne calcoli un valore approssimato a meno di $\frac{1}{10}$.

31. **(Sessione Ordinaria, 2002) - Sperimentazione autonoma 2**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che AC e BC sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa AB e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\hat{C}P$.

(a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

(b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.

(c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di DC.

(d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (Oxy), trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.

(e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.

(f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = kx^3 - (2-k)x^2 - (3-2k)x + 2,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

(a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

(b) Indicata con γ quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che γ ha un centro di simmetria.

(c) Dimostrare che la curva γ interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A.

(d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

(a) Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A' e B'. Stabilire se le rette AB e $A'B'$ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(b) Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

(c) In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0,$$

dove k è un parametro reale.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui il luogo è costituito da:

A) un punto;

B) due punti;

C) infiniti punti;

D) nessun punto.

(d) Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.

(e) Si considerino i numeri: $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$. Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

(f) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t} dt,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(g) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + (2 \cdot 2^{n-1}) + (2 \cdot 2^n),$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

(h) I numeri reali a, b sono tali che:

$4.3 < a < 5.2$ e $-1.7 < b < -1.5$.

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(i) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola e la retta di equazioni rispettivamente: $x = y^2$ e $x = 1$. La regione finita R di piano delimitata dalla parabola e dalla retta è trasformata nella regione R' dall'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2X - Y + 1 \\ \\ y = -3X + 2Y - 1 \end{cases}.$$

L'area di R' è:

$$A)\frac{4}{3}; B)4; C)\frac{28}{3}; D) \text{ un valore diverso dai precedenti.}$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione.

(j) Da un mazzo di carte da gioco napoletane (formato da 40 carte distribuite in 4 semi: coppe, spade, bastoni, denari) se ne estraggono due a caso. Calcolare la probabilità che fra esse vi sia almeno un RE.

32. **(Sessione Ordinaria, 2002) - Sperimentazione autonoma 3**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che AC e BC sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa AB e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\hat{C}P$.

(a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

(b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.

(c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di DC.

(d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (Oxy), trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.

(e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.

(f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = kx^3 - (2-k)x^2 - (3-2k)x + 2,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

(a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

(b) Indicata con γ quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che γ ha un centro di simmetria.

(c) Dimostrare che la curva γ interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A.

(d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

(a) Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A' e B'. Stabilire se le rette AB e $A'B'$ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(b) Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

(c) In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0,$$

dove k è un parametro reale.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui il luogo è costituito da:

A) un punto;

B) due punti;

C) infiniti punti;

D) nessun punto.

(d) Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.

(e) Si considerino i numeri: $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$. Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

(f) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t} dt,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(g) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + (2 \cdot 2^{n-1}) + (2 \cdots 2^n),$$

calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

(h) I numeri reali a, b sono tali che:

$4.3 < a < 5.2$ e $-1.7 < b < -1.5$.

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(i) Dimostrare che una primitiva della funzione $\dfrac{1}{x}$ della variabile reale x è la funzione $\ln|x|$.

(j) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Dimostrare che la condizione:

$$f'(a) = 0 \text{ e } f''(a) < 0$$

è sufficiente ma non necessaria per concludere che $f(x)$ ha un massimo relativo in a.

33. **(Sessione Ordinaria, 2002) - Scuole italiane all'estero - Europa**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo ABC è rettangolo in A e i suoi cateti hanno misure note, una doppia dell'altra.

Condotta per A una retta r non secante il triangolo e detta $B'C'$ la proiezione ortogonale dell'ipotenusa BC su r, si determini la posizione di r per cui l'area del trapezio $B'BCC'$ è massima.

Si affronti il problema

(a) con i metodi della trigonometria (indicando, ad esempio, con x l'angolo che r forma con AC o AB);

(b) con i metodi della geometria analitica introducendo un conveniente sistema di riferimento cartesiano.

Si ritrovi, infine, il risultato a partire dall'osservazione che il trapezio è somma del triangolo dato e dei triangoli rettangoli, di ipotenuse costanti, $B'BA$ e ACC'. Quand'è che ciascuno di questi ha area massima?

PROBLEMA 2

Uno spicchio sferico di ampiezza $20°$ ha il volume, approssimato a meno di 10^{-2}, uguale a $169.65 cm^3$.

(a) Si determini il raggio della sfera cui lo spicchio appartiene;

(b) supposto che la sfera sia di ferro (peso specifico = 7,8) e pesi 21.65 kg si stabilisca se essa è piena o contiene al suo interno qualche cavità.

(c) Si calcoli l'altezza del cono di volume minimo circoscritto alla sfera.

QUESTIONARIO

(a) Cosa si intende per funzione periodica? Quale è il periodo di $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$? Quale quello di $\cos \pi x$?

(b) Se $f(x) = 2^x$, mostrare che

$$a) f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$$

$$b) \frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4).$$

(c) Dopo aver spiegato il significato e il valore del numero e di Nepero, calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$$

(d) Determinare il valore del parametro t che soddisfa l'equazione:

$$\int_0^t \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx.$$

(e) Trovare l'equazione di una curva sapendo che il suo coefficiente angolare nel punto (x, y) è $x\sqrt{1+x^2}$ e passa per il punto (0, -2).

(f) Due angoli α e β misurano rispettivamente π^2 radianti e 539 gradi. Quale dei due è il maggiore? Quale è più grande, $\sin \alpha$ o $\sin \beta$?

(g) Provare che esiste un numero reale α con $1 < \alpha < 2$ in cui si annulla la funzione:

$$f(x) = \tan x + \log x - x$$

ove $\log x$ denota il logaritmo naturale di x.

(h) Si stima che la popolazione mondiale aumenti dell'1,7% ogni anno. Indicata con P la popolazione mondiale attuale e con Q la popolazione stimata tra un anno, il legame tra P e Q è espresso da:

a) $Q = 1.0017P$

b) $Q = 1.017P$

c) $Q = 1.17P$
d) $Q = 1.7P$
e) Nessuna delle risposte precedenti è esatte
Dare una esauriente spiegazione della risposta.

34. **(Sessione Ordinaria, 2002) - Scuole italiane all'estero - America** Latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1.

Si chiede di:

(a) dimostrare che il lato obliquo è la metà della base maggiore;
(b) determinare la base minore del trapezio sapendo che la sua area è k, essendo $k \neq 0$.
(c) discutere le condizioni di possibilità del problema ed esaminare i casi particolari;
(d) determinare il trapezio di area minima ed il volume del solido da esso generato nella rotazione di 360° attorno alla base maggiore.

PROBLEMA 2

Di un fascio di parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$ si hanno, localizzate nel punto $x = 0$, le informazioni seguenti:

$$y(0) = 2 - k,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2k$$

essendo k un parametro diverso da zero.

(a) Si determini l'equazione del luogo γ descritto al variare di k dai vertici delle parabole e se ne determinino le coordinate dei punti A e B di massimo e di minimo.
(b) Si verifichi che tutte le parabole del fascio passano per i punti A e B e se ne dia una giustificazione.

(c) Si determinino le due parabole del fascio che hanno i vertici rispettivamente in A e B e si calcoli l'area della regione finita da esse racchiusa.

QUESTIONARIO

(a) Il peso totale di 5 giocatori di calcio è 405 kg e il peso medio di 10 campionesse di nuoto è 47 kg. Trovare il peso medio di questi quindici atleti.

(b) Un cilindro avente il raggio di base 8.5 cm e altezza 20 cm viene riempito con biglie d'acciaio di 2.1 cm di diametro. Dimostrare che nel cilindro ci sono meno di 940 biglie.

(c) Tra tutti i coni aventi apotema 1, determinare quello di volume massimo.

(d) Enunciare il teorema di de L'Hôpital e applicarlo per calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty)} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1+3^x)}.$$

(e) Determinare la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ che soddisfi l'equazione $f(x+1) = 2f(x)$ per tutti i numeri reali x. Successivamente della funzione trovata se ne calcoli la derivata seconda in $x = 0$ e se ne dia un'approssimazione con due cifre decimali esatte.

(f) Dopo aver dato una giustificazione della formula d'integrazione per parti, applicarla per calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 e^x(x^2+1)dx.$$

(g) A quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti a e b della funzione $y = a\sin^2 x + b\sin x$ affinché essa abbia un massimo relativo per $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(h) Dimostrare che la derivata $(n-1)$-esima di un polinomio $P(x)$ di grado n è zero.

35. **(Sessione Suppletiva, 2002) - Corso di Ordinamento**

it Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Se il polinomio $f(x)$ si divide per x^2-1 si ottiene x come quoziente ed x come resto.

(a) Determinare $f(x)$.

(b) Studiare la funzione
$$y = \frac{f(x)}{x^2-1}$$
e disegnarne il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

(c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

(d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

(e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:
$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+1},$$
calcolare una primitiva della funzione $\frac{f(x)}{x^2-1}$.

PROBLEMA 2

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo $ABCD$, è tale che:

- il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;

- lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;

- la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

(a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

(b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio $ABCD$.

(c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base $ABCD$ della piramide.

(d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

QUESTIONARIO

(a) Si consideri la seguente equazione in x, y:

$$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0,$$

dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

A - è una circonferenza per ogni valore di k;

B - è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$;

C - è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$;

D - non è una circonferenza qualunque sia k.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

(b) Considerata la funzione di variabile reale: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente ad 1 e giustificare la risposta.

(c) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ ed $f(1) = -2$. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

(d) Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \sin 2x \text{ per } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \dfrac{1+a}{\sin x} \text{ per } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste una valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x = 0$.

(e) Un titolo di borsa ha perso ieri l'$x\%$ del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'$y\%$, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

(f) Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

(g) Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x+4}$ è:

$$A) \ln \frac{x}{x+2}; B) \ln \frac{x+2}{x}; C) \ln \sqrt{x^2+2x}; D) \ln \sqrt{2x^2+x}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

(h) S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che $a_n = \dfrac{S_n}{2n}$, è:
A) costante; B) crescente; C) decrescente.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

(i) Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

(j) Di due rette a, b - assegnate nello spazio ordinario - si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p.
a) È possibile che le rette a, b siano parallele?
b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?
c) Le rette a, b sono comunque parallele?
d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?
Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

36. **(Sessione Suppletiva, 2002) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b \log x}{x},$$

ove $\log x$ denota il logaritmo naturale di x e a e b sono numeri reali non nulli.

(a) Si trovino i valori di a e b per i quali il grafico Γ della funzione passa per i punti $(e^{-1}, 0)$ e $(e^2, 3e^{-2})$

(b) si studi e si disegni Γ;

(c) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di G rispetto alla retta $y = 1$;

(d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1 \leq x \leq 2$, da Γ e da Γ;

(e) si disegnino, per i valori di a e b trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + \log|x|}{|x|} \qquad y = \left|\frac{a + \log x}{x}\right|.$$

PROBLEMA 2

È data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

(a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;

(b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;

(c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto $r = 1$ metro;

(d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;

(e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

QUESTIONARIO

(a) Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

(b) Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

(c) Calcolare la derivata rispetto a x della funzione

$$\int_x^b f(t)dt$$

ove $f(x)$ è una funzione continua.

(d) Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}.$$

(e) Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x \sin x = 1$ c'è almeno una radice reale di $e^x \cos x = -1$.

(f) Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

(g) Verificare che la funzione:

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(0)$.

(h) Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x} dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

(i) Verificato che l'equazione ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

(j) Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra 'concetto primitivo' e 'assioma'.

37. **(Sessione Suppletiva, 2002) - Sperimentazione autonoma 1**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la curva Γ di equazione:

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(a) Si disegni Γ e si consideri la retta r d'equazione , $m > 0$, indicando con A il punto di intersezione di Γ con r di ascissa più piccola. Si determini m in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto A e delimitate una, dall'asse y, da Γ e da r; l'altra da Γ, da r e dalla retta $x = 1$;

(b) si verifichi che il valore m trovato è il valore medio (o media integrale) di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e se ne dia una giustificazione geometrica;

(c) si trovi l'equazione della curva Γ_1 corrispondente di Γ nella rotazione di 90° in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;

(d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra Γ, Γ_1 e la retta di equazione $y = 1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

PROBLEMA 2

Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto.

Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $\overline{OA} = 1$ e $\overline{OB} = \sqrt{3}$ mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s:

(a) l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di $A'B'$;

(b) la posizione di s per cui il triangolo BOP ha area massima;

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

QUESTIONARIO

(a) Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.

(b) Un'azienda, in un momento di crisi, abbassa gli stipendi di tutti i dipendenti del 7%. Superata la delicata fase, aumenta tutti gli stipendi del 7%. Come è dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

(c) Studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due rette perpendicolari fissate nel piano non superi 1.

(d) Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$ mostrare che esiste un valore a tale che $f(a) = p$, specificando altresì il significato e il valore di p.

(e) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

(f) Posto $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$, trovare $f(x)$.

(g) Trovare i massimi e minimi relativi di $f(x) = x^x$, $x > 0$.

(h) La curva $(y + 1)^3 = x^2$ passa per i punti (1, 0) e (-1, 0). Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?

(i) Verificare che la funzione:

$$y = e^{-x} + \frac{1}{x},$$

è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(1 + e^{-1})$.

(j) Dimostrare che l'equazione $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ha un'unica soluzione nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e calcolarla.

38. **(Sessione Suppletiva, 2002) - Sperimentazione autonoma 2**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la curva Γ di equazione:

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(a) Si disegni Γ e si consideri la retta r d'equazione , $m > 0$, indicando con A il punto di intersezione di Γ con r di ascissa più piccola. Si determini m in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto A e delimitate una, dall'asse y, da Γ e da r; l'altra da Γ, da r e dalla retta $x = 1$;

(b) si verifichi che il valore m trovato è il valore medio (o media integrale) di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e se ne dia una giustificazione geometrica;

(c) si trovi l'equazione della curva Γ_1 corrispondente di Γ nella rotazione di $90°$ in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;

(d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra Γ, Γ_1 e la retta di equazione $y = 1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

PROBLEMA 2

Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto.

Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $\overline{OA} = 1$ e $\overline{OB} = \sqrt{3}$ mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s:

(a) l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di $A'B'$;

(b) la posizione di s per cui il triangolo BOP ha area massima;

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

QUESTIONARIO

(a) Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono sei senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la sestina (17, 27, 37, 47, 67, 87).

(b) Nell'esperimento del lancio di una moneta non truccata, calcolare la probabilità di avere almeno 5 teste in 6 lanci.

(c) Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$ mostrare che esiste un valore a tale che $f(a) = p$, specificando altresì il significato e il valore di p.

(d) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

(e) Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.

(f) Determinare il numero delle radici dell'equazione $x + \arctan x - 1 = 0$ e, applicando uno dei metodi numerici studiati, trovare di esse un valore approssimato.

(g) Posto $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$, trovare $f(x)$.

(h) Trovare i massimi e minimi relativi di $f(x) = x^x$, $x > 0$.

(i) Tenuto conto che:

$$\log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x} dx,$$

si calcoli un'approssimazione di $\log 3$ applicando una delle formule di quadratura studiate.

(j) Verificare che la funzione:

$$y = e^{-x} + \frac{1}{x},$$

è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(1 + e^{-1})$.

39. **(Sessione Suppletiva, 2002) - Sperimentazione autonoma 3**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la curva Γ di equazione:

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(a) Si disegni Γ e si consideri la retta r d'equazione , $m > 0$, indicando con A il punto di intersezione di Γ con r di ascissa più piccola. Si determini m in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto A e delimitate una, dall'asse y, da Γ e da r; l'altra da Γ, da r e dalla retta $x = 1$;

(b) si verifichi che il valore m trovato è il valore medio (o media integrale) di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e se ne dia una giustificazione geometrica;

(c) si trovi l'equazione della curva Γ_1 corrispondente di Γ nella rotazione di $90°$ in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;

(d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra Γ, Γ_1 e la retta di equazione $y = 1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

PROBLEMA 2

Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto.

Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $\overline{OA} = 1$ e $\overline{OB} = \sqrt{3}$ mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s:

(a) l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di $A'B'$;

(b) la posizione di s per cui il triangolo BOP ha area massima;

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

QUESTIONARIO

(a) Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono sei senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la sestina (17, 27, 37, 47, 67, 87)

(b) Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$ mostrare che esiste un valore a tale che $f(a) = p$, specificando altresì il significato e il valore di p.

(c) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

(d) Posto $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$, trovare $f(x)$.

(e) Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.

(f) Un'azienda, in un momento di crisi, abbassa gli stipendi di tutti i dipendenti del 7%. Superata la delicata fase, aumenta tutti gli stipendi del 7%. Come è dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

(g) Studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due rette perpendicolari fissate nel piano non superi 1.

(h) Trovare i massimi e minimi relativi di $f(x) = x^x$, $x > 0$.

(i) La curva $(y+1)^3 = x^2$ passa per i punti (1, 0) e (-1, 0). Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?

(j) Verificare che la funzione:

$$y = e^{-x} + \frac{1}{x},$$

è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(1 + e^{-1})$.

40. **(Sessione Suppletiva, 2002) - Scuole italiane all'estero - Buenos Aires - Lima**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = x^2 + x + 1.$$

(a) Condotte per il punto O le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti A e B di contatto.

(b) Trovare le coordinate del punto C, situato da parte opposta di O rispetto alla retta AB, tale che il triangolo ABC sia isoscele e rettangolo in C.

(c) Determinare l'equazione della circonferenza k avente il centro in C e passante per A.

(d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco AB di parabola e dai segmenti CA e CB.

(e) Determinare in quante parti la parabola p divide iil cerchio delimitato da k.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$

dove m è un parametro reale.

(a) Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.

(b) Determinare, tra le curve assegnate, la curva γ avente un flesso di ascissa 1.

(c) Per il punto A, di ascissa $\frac{1}{2}$, condurre le due rette tangenti a γ e indicare con B e C $(x_B > x_C)$ i punti che tali rette tangenti hanno in comune con γ, oltre al punto A.

(d) Sull'arco AB di γ trovare un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.

(e) Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a γ.

QUESTIONARIO

(a) Una piramide si dice retta:
A) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono a due a due perpendicolari;
B) se almeno un angolo del poligono di base è retto;
C) se l'altezza è perpendicolare alla base;
D) per una ragione diversa delle precedenti.
Una sola risposta è corretta: individuarla.

(b) Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza s di uno spigolo.

(c) La cifra delle unità dello sviluppo della potenza 2^2002 è:
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(d) Considerata la seguente equazione in x:

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

e indicate con x_1 e x_2 le sue soluzioni, calcolare il valore della seguente espressione:

$$(x_1^2 + x_2^2)^3 + (x_1^2 x_2^2)^3 - (x_1 + x_2) - x_1 x_2.$$

(e) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2}dt.$$

(f) Determinare il dominio di continuità e quello di derivabilità della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

(g) Enunciare il teorema di de L'Hôpital e stabilire se può essere applicato per calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}.$$

41. **(Sessione Straordinaria, 2002) - Corso di Ordinamento**

it Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Con riferimento ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

(a) scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto (8, 2) e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M ed N in cui la bisettrice b del 1° e 3° quadrante interseca la curva;

(b) scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x > 0$ e passante per i punti M ed N;

(c) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b;

(d) dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N, calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola.

PROBLEMA 2

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

(a) studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \; y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

(b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

(c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

(d) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

QUESTIONARIO

(a) Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ e sia x_0 un elemento di D: definire la continuità e la discontinuità di $f(x)$ in x_0 e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.

(b) In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo $MNN'M'$, fornendo una esauriente dimostrazione.

(c) Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

(d) In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

(e) Dimostrare che la derivata della funzione $\log_a x$ è la funzione $\frac{1}{x} log_a e$, dove e è la base dei logaritmi naturali.

(f) Considerata l'equazione $x^2 + kx + k = 0$, calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per $k \to +\infty$.

(g) Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = -1, \ \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = 1.$$

Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$, assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.

(h) Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

(i) Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

42. **(Sessione Straordinaria, 2002) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abxz = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz = a^2 b \end{cases} \qquad [1];$$

stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali a, b esso è:

- determinato;
- indeterminato;
- impossibile.

Posto che la terna (x, y, z) sia una soluzione del sistema [1], studiare la curva di equazione:

$$y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z$$

e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale (Oab).

PROBLEMA 2

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3},\ y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici.

(a) Dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

(b) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

(c) calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

QUESTIONARIO

(a) In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo $MNN'M'$, fornendo una esauriente dimostrazione.

(b) Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

(c) In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

(d) Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1, \ \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1, \ .$$

(e) Considerata la funzione $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-2}$, stabilire se è continua e derivabile nel punto $x = 2$ e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.

(f) Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

(g) Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:

- divisibile per 10 o per 8,
- divisibile per 10 e per 8,
- non divisibile per 10 né per 8.

(h) Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro (1, 2) e caratteristica $\frac{1}{4}$ trasforma il triangolo di vertici (4, 0), (-4, 4), (0, 8).

(i) Tra le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che trasforma i punti di coordinate $(3, \sqrt{2})$ e $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ordinatamente nei punti di coordinate $\left(\frac{1}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$.

(j) Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta.

43. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionari.

PROBLEMA 1

Si consideri il tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

(a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T con r il raggio della sfera iscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

(b) Considerati il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

(c) Condotto il piano a, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

(d) Considerata nel piano a la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

(e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area centimetri quadrati.

PROBLEMA 2

É assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|},$$

dove m è un parametro reale.

(a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

(b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

(c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

(d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dall'asse x e della retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

(a) Dopo aver fornito la definizione di ¨rette sghembe ̦ si consideri la seguente proposizione:

'Comunque si prendano nello spazio le tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe'.

Dire se è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(b) Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide

(c) Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP.

Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

(d) Il dominio della funzione $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - (x-1))$ è l'insieme degli x reali tali che: A) $-1 < x \leq 3$

B) $-1 \leq x < 3$

C)$0 < x \leq 3$

D)$0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(e) La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

(f) La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f(x) = 2xe^{x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

(g) Considerati i primi n numeri naturali a partire da $1 : 1, 2, 3, \cdots, n-1, n$, moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A)$\frac{1}{4n^2}(n+1)^2$

B)$\frac{1}{3n}(n^2 - 1)$

C)$\frac{1}{24n}(n+1)(n+2)(3n+1)$

D)$\frac{1}{24n}(n^2 - 1)(n+2)(3n+2)$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

(h) x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

A) è divisibile per 2 e per 3;

B) è divisibile per 2 ma non per;

3 C) è divisibile per 3 ma non per 2;

D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(i) Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

(j) Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

44. **(Sessione Ordinaria, 2003) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t. La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

(a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

(b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

(c) Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

(a) la funzione f sia pari;

(b) $f(0) = 2$;

(c) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2\log 2}$

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G. Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta. Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)}dx$

Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

QUESTIONARIO

(a) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

(b) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.

A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

(c) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

(d) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

(e) Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$

(f) Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

(g) Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

(h) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

(i) Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

(j) Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

45. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Sperimentazione Autonoma 1**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t. La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

(a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

(b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

(c) Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy, è dato il rettangolo $OABC$ con i vertici A e C di coordinate rispettive (2, 0) e (0, 1).

Sia P un punto sul lato OA. Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $C\hat{P}B$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.

Si descrivano i luoghi geometrici Φ e Γ dei punti del piano che vedono il lato CB sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\frac{\delta}{2}$.

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Φ e Γ.

QUESTIONARIO

(a) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

(b) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

(c) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

(d) Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$

(e) Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

(f) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

(g) Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

(h) Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

(i) Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $\frac{2\pi}{3}$.

(j) Perché 'geometria non euclidea'? Che cosa viene negato della geometria euclidea?

46. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Sperimentazione Autonoma 2**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t. La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

(a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

(b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

(c) Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy, è dato il rettangolo $OABC$ con i vertici A e C di coordinate rispettive (2, 0) e (0, 1).

Sia P un punto sul lato OA. Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $C\hat{P}B$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.

Si descrivano i luoghi geometrici Φ e Γ dei punti del piano che vedono il lato CB sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\frac{\delta}{2}$.

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Φ e Γ.

QUESTIONARIO

(a) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

(b) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

(c) Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$

(d) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

(e) Si vuole che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

(f) Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $\frac{2\pi}{3}$.

(g) Nell'esperimento del lancio di una moneta non truccata, calcolare la probabilità di avere almeno 6 teste in 9 lanci.

(h) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.

A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

(i) Perché 'geometria non euclidea'? Che cosa viene negato della geometria euclidea?

(j) Esporre una strategia numerica per il calcolo approssimato di

$$\log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x} dx.$$

47. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Sperimentazione Autonoma 3**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t. La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

(a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

(b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

(c) Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy, è dato il rettangolo $OABC$ con i vertici A e C di coordinate rispettive (2, 0) e (0, 1).

Sia P un punto sul lato OA. Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $C\hat{P}B$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.

Si descrivano i luoghi geometrici Φ e Γ dei punti del piano che vedono il lato CB sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\frac{\delta}{2}$.

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Φ e Γ.

QUESTIONARIO

(a) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

(b) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.

A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

(c) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

(d) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

(e) Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

(f) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

(g) Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

(h) Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $\frac{2\pi}{3}$.

(i) Perché 'geometria non euclidea' ? Che cosa viene negato della geometria euclidea?

(j) Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$

48. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Scuole italiane all'estero - Europa**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Tra le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 4y - k = 0$, sia Γ quella di raggio $2\sqrt{2}$. Siano A e B i punti in cui Γ interseca l'asse x.

(a) Determinare l'equazione della parabola p, con asse parallelo all'asse y, passante per A e tangente in B alla retta di equazione $y = -2x + 4$.

(b) Calcolare l'area di ciascuna delle due parti in cui p divide il cerchio Γ.

(c) Nel segmento parabolico determinato dalla corda AB inscrivere un rettangolo, con un lato su AB, di area massima.

(d) Tale rettangolo è anche quello di massimo perimetro?

PROBLEMA 2

Si consideri un cono circolare retto.

(a) Si sezioni il cono con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a > b)$ e h rispettivamente le misure dei raggi delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprimano in funzione di a, b, h il volume e la superficie laterale del tronco di cono illustrando il ragionamento seguito.

(b) Posto che il cono preso in esame abbia la superficie laterale di $\sqrt{3}\pi$ dm^2, quale ne è il volume massimo?

(c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta al cono massimo determinato.

(d) Si dia una approssimazione in centilitri della capacità di tale sfera.

QUESTIONARIO

(a) Date un esempio di solido la cui superficie laterale è 7π.

(b) Date un esempio di polinomio il cui grafico taglia la retta $y = 1$ tre volte.

(c) Dimostrate, senza risolverla, che l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ ammette una e una sola radice reale.

(d) Calcolate D[arctan x] (D= derivata) e dite perché essa è opposta a D[arctan x].

(e) Scrivete l'equazione della tangente a λ, grafico di $f(x) = 2x - \log(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$ nel suo punto P di ascissa 0.

(f) Dopo aver tracciato il grafico della funzione $\log_4 x$, come vi regolereste per tracciare il grafico della funzione $\log_4(x - 5)$? e quello della funzione $\log_4 2x$?

(g) Fra le primitive di $y = 3\cos^3 x$ trovare quella il cui diagramma passa per $P(0, 5)$.

(h) Il coefficiente angolare della tangente al diagramma di $f(x)$ è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Determinate $f(x)$ sapendo che $f(0) = 4$.

49. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Scuole italiane all'estero, America emisfero boreale**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

(a) Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.

(b) Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.

(c) Dimostrare che i tre punti sono allineati.

(d) Tra le curve assegnate determinare la curva γ avente per asintoto la retta di equazione $y = x$ e disegnarne l'andamento.

(e) Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva γ.

PROBLEMA 2

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

(a) tra le iperboli di equazione $xy = k$ indicare con j quella che passa per il punto $A(1, 3)$ e chiamare B il suo punto di ascissa -3;

(b) determinare i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B;

(c) determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB;

(d) indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j, dalla parabola p, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

QUESTIONARIO

(a) Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ. Sapendo che $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos\beta = \frac{12}{13}$, calcolare il valore esatto di $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

(b) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2\sin x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k\sin X$.

(c) Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

(d) x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.

(e) Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$\ln\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

(f) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \le x \le 1.1$; inoltre $f(1.1) = 0$ e $1.0 \le f'(x) \le 1.1$ in ogni x dell'intervallo $1.0 < x < 1.1$. Dimostrare che risulta: $-0.11 \le f(1.0) \le -0.10$.

(g) Sia $f(x)$ una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \le x \le b$, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è dato dalla formula seguente:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

50. **(Sessione Ordinaria, 2003) - Scuole italiane all'estero, America Latina**

it Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche (x, y), studiate la curva Γ di equazione:

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}.$$

(a) Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.

(b) Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva Γ. Sul segmento AB prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di Γ avente la stessa ascissa di P, sia massima l'area del triangolo APQ.

(c) Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da Γ e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.

(d) Determinate l'equazione della curva Σ simmetrica di Γ rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y), siano:

S il punto di coordinate $(0, 4)$; P un punto della retta r di equazione $2x-y-2 = 0$; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all'asse y.

Trovate l'equazione cartesiana del luogo Γ descritto da Q al variare di P su r.

Studiate Γ, disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per $x = 3$.

Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra Γ, il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta $x = 2$.

Si trovi l'equazione del luogo Γ' simmetrico di Γ rispetto alla retta $x = 2$.

QUESTIONARIO

(a) Quale è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^x$ Quale ne è il segno della derivata prima e quale quello della derivata seconda nel punto $x = \pi$?

(b) Calcolate il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

(c) Dimostrate che
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

(d) Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

(e) I gradi sessagesimali, i radianti e i gradi centesimali sono le più comuni unità per la misura degli angoli. Date di ciascuna di esse una esauriente definizione.

(f) Sia APB un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di APB e quale quella in gradi centesimali? Motivate la vostra risposta.

(g) Calcolate la derivata della funzione
$$f(x) = \arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1}.$$
Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è una costante? Se sì, quale è la costante?

(h) Verificate che la funzione: $y = e^{-x} + x^{-1}$
è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolate $g'(1+e^{-1})$.

51. **(Sessione Suppletiva, 2003) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:
$$\overline{AB} = 3cm, \overline{AC} = 2cm, C\hat{A}B = 60°.$$
Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

(a) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.

(b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.

(c) Si trovi sul lato AD, internamente ad esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.

(d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

PROBLEMA 2

È data una piramide retta a base quadrata.

(a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con $a, b(a > b)$ e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta.

Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.

(b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}dm^2$.

(c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.

(d) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

QUESTIONARIO

(a) Tra i rettangoli aventi la stessa area di 16 m^2 trovare quello di perimetro minimo.

(b) Cosa si intende per 'funzione periodica'? Quale è il periodo della funzione

$$f(x) = \sin x - 2\cos x?$$

(c) Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.

(d) Provare che se l'equazione $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

(e) Dare una giustificazione delle formule

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

e utilizzarle per provare che:

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

(f) Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

(g) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

(h) Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che:

$$f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2 \text{ e } f'(0) = 0$$

Quale è $f(x)$?

(i) Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani

(j) Definire gli asintoti - orizzontale, obliquo, verticale - di una curva e fornire un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

52. **(Sessione Suppletiva, 2003) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

(a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

(b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

(c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

(d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 2

In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

(a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

(b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

(c) Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.

(d) Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.

(e) Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

QUESTIONARIO

(a) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

[Nota - La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

(b) Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

$$A)x \leq 0 \text{ e/o } x > 2; B)x \leq 0 \text{ e/o } x \geq 2; C)x = 0 \text{ e/o } x > 2; D)x = 0 \text{ e/o } x \geq 2.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale a è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = a$.

(e) Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per:

$$a)x \to +\infty; b)x \to -\infty; c)x \to 0,$$

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

(f) Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

Dire se l'affermazione:

'*il sistema ammette la sola soluzione* $x = 0, y = 0, z = 0$ *per ogni valore di k diverso da 1*'

è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

(g) Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

(h) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

dove a, b sono parametri reali.

Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

(i) Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:

i. è bianca e viene rimessa nell'urna?
ii. è bianca e non viene rimessa nell'urna?
iii. è messa da parte senza guardarne il colore?

(j) Considerata l'equazione in x:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

53. **(Sessione Suppletiva, 2003) - Sperimentazione Autonoma 1**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

(a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

(b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

(c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

(d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 2

In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

(a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

(b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

(c) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.

(d) Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.

(e) Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

QUESTIONARIO

(a) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

[Nota - La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

(b) Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

$$A)x \leq 0e/ox > 2; B)x \leq 0e/ox \geq 2; C)x = 0e/ox > 2; D)x = 0e/ox \geq 2.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale a è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = a$.

(e) Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x^{\frac{1}{x}}$ per: $a)x \rightarrow +\infty; b)x \rightarrow -\infty; c)x \rightarrow 0$, e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

(f) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$f(x) = \arcsin x$$

è la funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(g) Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

(h) Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:

$$10^{(e^x)} = e^{(10^x)},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(i) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $-1 \leq x \leq 0$; inoltre $f(0) = 0$ e $-1 \leq f'(x) \leq 0$ in ogni x dell'intervallo $-1 < x < 0$. Stabilire in modo esauriente se è vero o falso che risulta $0 \leq f(-1) \leq 1$.

(j) Considerata l'equazione in x:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

54. **(Sessione Suppletiva, 2003) - Sperimentazione Autonoma 2**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

(a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

(b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

(c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

(d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 2

In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

(a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

(b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

(c) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.

(d) Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.

(e) Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

QUESTIONARIO

(a) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

[Nota - La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

(b) Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

$$A)x \leq 0e/ox > 2; B)x \leq 0e/ox \geq 2; C)x = 0e/ox > 2; D)x = 0e/ox \geq 2.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale a è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = a$.

(e) Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x^{\frac{1}{x}}$ per:
$a)x \rightarrow +\infty; b)x \rightarrow -\infty; c)x \rightarrow 0$, e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

(f) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione:

$$y = \sin x + \cos x + 2.$$

Stabilire se esiste una traslazione che la trasformi nella forma:

$$y = ksenx.$$

(g) Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

(h) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

dove a, b sono parametri reali.

Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

(i) Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:

i. è bianca e viene rimessa nell'urna?

ii. è bianca e non viene rimessa nell'urna?

iii. è messa da parte senza guardarne il colore?

(j) Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:

$$10^{(e^x)} = e^{(10^x)},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(Sessione Suppletiva, 2003) - Sperimentazione Autonoma 3

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

(a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

(b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

(c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

(d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 2

In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

(a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

(b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

(c) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.

(d) Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.

(e) Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

QUESTIONARIO

(a) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

[Nota - La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

(b) Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(c) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

$A)x \leq 0e/ox > 2; B)x \leq 0e/ox \geq 2; C)x = 0e/ox > 2; D)x = 0e/ox \geq 2.$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale a è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = a$.

(e) Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x^{\frac{1}{x}}$ per:
$a)x \rightarrow +\infty; b)x \rightarrow -\infty; c)x \rightarrow 0$, e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

(f) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$f(x) = \arcsin x$$

è la funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(g) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette a, b di equazioni rispettivamente: $y = x + \frac{1}{7}, y = \frac{1}{7}x - 1$. Calcolare il coseno dell'angolo orientato (a, b).

(h) Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:

$$10^{(e^x)} = e^{(10^x)},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

(i) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $-1 \leq x \leq 0$; inoltre $f(0) = 0$ e $-1 \leq f'(x) \leq 0$ in ogni x dell'intervallo $-1 < x < 0$. Stabilire in modo esauriente se è vero o falso che risulta $0 \leq f(-1) \leq 1$.

(j) Per $x \rightarrow 0$ la funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$:

 i. ha limite 0;
 ii. ha limite ∞;
 iii. è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ che non si può eliminare;
 iv. non ammette limite.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(Sessione Suppletiva - 2003) Scuole italiane all'estero - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considerate le funzioni

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ e } g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

(a) Tracciate nel piano (t, y) i loro rispettivi grafici F e G.

(b) Provate che un punto qualsiasi dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ avente per ascissa $f(t_1)$ ha per ordinata $g(t_1)$.

(c) Siano P e Q i punti rispettivamente di F e G aventi la medesima ascissa t_0. Stabilite se la distanza tra P e Q assume un valore di minimo o di massimo assoluto per qualche particolare valore di t_0.

(d) Calcolate l'area della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione e quella della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione .

PROBLEMA 2

Determinare b e c affinché la parabola di equazione $y = -x^2 + bx + c$ abbia il vertice in $A(1; 6)$. Determinare altresì il parametro k in modo che l'iperbole di equazione $xy = k$ passi per A.

(a) Disegnare le due curve e determinare le coordinate dei loro ulteriori punti comuni indicando con B quello appartenente al primo quadrante.

(b) Calcolare l'area della parte di piano limitata dai due archi AB della parabola e dell'iperbole.

(c) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse y, della medesima parte di piano.

QUESTIONARIO

(a) Cosa si intende per 'funzione periodica'? Quale è il periodo della funzione $f(x) = \tan 2x + \cos 2x$?

(b) Provate che se l'equazione $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $3ax^2 + 2bx + c = 0$.

(c) Provate che la curva di equazione

$$y = \frac{a_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$$

con a_0 e b_0 reali non nulli, ammette per asintoto la retta di equazione $y = \dfrac{a_0}{b_0}$.

(d) Quale è il flesso della funzione $f(x) = e^x - x^2$?

(e) Provate che una qualsiasi curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, presenta uno e un solo flesso e che questo è il centro di simmetria della curva.

(f) Per quale x la tangente alla curva di equazione $y = \arcsin x$ ha coefficiente angolare 1?

(g) $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive rispettivamente di $y = x^2$ e $y = x$. Sapendo che è $G(0) - F(0) = 3$, quanto vale $G(1) - F(1)$?

(h) Tra i coni circolari retti di apotema 3dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.

55. **(Sessione Suppletiva, 2003) - Scuole italiane all'estero - America (emisfero boreale)**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(a, 0)$ e $B(0, 2a)$, dove a è un parametro reale positivo.

(a) Trovare l'equazione della parabola di asse parallelo all'asse y, avente il vertice in A e passante per B.

(b) Sull'arco AB della parabola determinare il punto P per il quale risulta minima la somma delle coordinate e calcolare il valore di a per cui questa somma minima vale $frac74$.

(c) Chiamata k la parabola corrispondente al valore di a così trovato, determinare l'equazione della retta t tangente a k nel suo punto P e quella della retta p perpendicolare a t in P.

(d) Indicato con Q il punto in cui la retta p interseca ulteriormente la parabola k, calcolare le aree delle due parti in cui il cerchio di diametro AB è diviso dalla parabola k.

PROBLEMA 2

Su una semicirconferenza di centro O e diametro AB, lungo $2r$, dove r è una lunghezza nota, si consideri un punto P, si conduca, parallelamente alla retta AP, la tangente alla semicirconferenza e si chiami M il punto di contatto. Sia poi Q il punto in cui questa tangente interseca quella condotta per P. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo $P\hat{A}B$:

(a) si esprima in funzione di x l'area S' del triangolo AOP;

(b) si esprima in funzione di x l'area S'' del quadrilatero $OPQM$;

(c) posto $\tan\frac{x}{2} = t$, si esprima in funzione di t il rapporto $f(t) = \dfrac{S'}{S''}$;

(d) si studi la funzione $f(t)$ ottenuta e se ne disegni un andamento approssimato prescindendo dalla questione geometrica.

QUESTIONARIO

(a) Sapendo che $\sin 30° = \frac{1}{2}$, calcolare $\sin 15°$.

(b) Di triangoli in cui due lati hanno lunghezze rispettivamente: $b = 2\sqrt{3}-2$ e $c = 4$ e l'angolo opposto al primo di essi ha ampiezza $\beta = 15°$, ne esistono:

A) nessuno; B) uno; C) due; D) più di due.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta effettuata.

(c) Dimostrare che se tre rette distinte dello spazio passano per uno stesso punto O e ciascuna di esse interseca una quarta retta in un punto distinto da O allora le quattro rette sono complanari.

(d) Si consideri la seguente espressione:

$$\frac{\log_{\frac{1}{4}} 2 + \log_3 \sqrt[3]{9}}{\log_2 \sqrt[4]{8} - \log_{\frac{1}{2}} 8}.$$

Il suo valore è:
$$A)\frac{2}{3}; B)\frac{1}{23}; C)\frac{2}{45}; D)-\frac{14}{27}.$$
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(e) Determinare il campo di esistenza della funzione:
$$f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x-1}).$$

(f) Considerata la funzione $f(x) = \frac{1}{x^{x-1}}$, stabilire se esistono i suoi limiti per: a) $x \to -\infty$, b) $x \to +\infty$, c) $x \to 1$,
e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

(g) Si consideri il seguente integrale: $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^4 + x^3 + 2} dx$. Il suo valore è, con buona approssimazione:
A) - 0.024; B) - 0.24; C) - 2.4; D) un valore diverso dai precedenti.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

56. **(Sessione Suppletiva, 2003) - Scuole italiane all'estero - America Latina**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considerate assegnate, nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y), la parabola λ d'equazione: $x^2 = 4(x - y)$ e la retta r d'equazione: $2y = x + 3$.

(a) Verificate che λ e r non hanno punti di intersezione.

(b) Trovate il punto P di λ che ha minima distanza da r e determinate altresì il valore di tale minima distanza.

(c) Determinate l'area della regione finita di piano R che è delimitata da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.

PROBLEMA 2

Tra i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio 6 cm, determinate:

(a) il cono C di volume minimo e il valore, espresso in litri, di tale volume minimo;

(b) il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura di C;

(c) il rapporto tra i volumi delle due sfere, inscritta e circoscritta a C.

QUESTIONARIO

(a) Se è:

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2}$$

quale è il

$$\lim_{x\to 4} f(x)?$$

(b) Spiegate perché la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ e calcolate la derivata di ordine 725 di $\sin x$.

(c) Considerate la curva $y = x - \dfrac{1}{2x}$: ci sono punti di essa dove la pendenza è 3? Se si, determinateli.

(d) Mostrate che le tangenti alla curva $y = \dfrac{\pi \sin x}{x}$ in $x = \pi$ e $x = -\pi$ si intersecano ad angolo retto.

(e) Provate che la funzione $f(x) = x^4 + 3x + 1$ ha esattamente uno zero nell'intervallo $[-2, -1]$.

(f) Mostrate che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

(g) Per quale o quali valori della costante k la curva $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha esattamente una tangente orizzontale.

(h) Tra i coni circolari retti di apotema 6 dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.

57. **(Sessione Straordinaria, 2003) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnata la seguente equazione in x:

$$x^3 + 2x - 50 = 0.$$

(a) Dimostrare che ammette una ed una sola soluzione $\overline{x}$ nel campo reale.

(b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.

(c) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale $k (k \neq -1)$ per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.

(d) Stabilire se esiste un valore di $\overline{k}$ per cui la curva $C_{\overline{k}}$è simmetrica rispetto all'origine O.

(e) Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x + m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k = 0$.

PROBLEMA 2

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

$$6cm, 10cm, 4(4 + \sqrt{5})cm.$$

(a) Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile ad una circonferenza.

(b) Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.

(c) Dopo aver riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.

(d) Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.

(e) Calcolare le aree delle regioni piane il cui la parabola p divide il trapezio.

(f) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO

(a) Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: *due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni.*

Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(b) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto;

2) due punti;

3) infiniti punti;

4) nessun punto.

(c) Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

(d) Dire se è vero che risulta: $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = \sqrt{3} + x$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

(e) Si consideri la funzione polinomiale in x:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = a_0 + a_1x$.

(f) Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + n \text{ se } n > 1 \end{cases} .$$

Calcolare $a_1 00$.

(g) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{2}{3^n},$$

calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(h) Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)dt, \text{ con x ¿ 0},$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

(i) Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama segmento sferico a due basi. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

(j) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})dt}{\sin^2 x},$$

essendo e la base dei logaritmi naturali

58. **(Sessione Straordinaria, 2003) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnata la seguente equazione in x:

$$x^3 + 2x - 50 = 0, \text{ con } x \in R.$$

(a) Dimostrare che ammette una ed una sola soluzione $\overline{x}$.

(b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.

(c) Scrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di a meno di 10^{-4}.

(d) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale $k (k \neq -1)$ per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.

(e) Stabilire se esiste un valore di k per cui la curva è simmetrica rispetto all'origine O.

PROBLEMA 2

Un gruppo di persone è costituito da 3 uomini e dalle rispettive mogli. Ciascun uomo sceglie a caso una fra le 3 donne, con uguali possibilità di scelta, per un giro di ballo.

(a) Calcolare quante sono le possibili terne di coppie di ballerini.

(b) Calcolare la probabilità che:

   i. nessun uomo balli con la propria moglie,

   ii. un solo uomo balli con la propria moglie,

   iii. tutti e tre gli uomini ballino con le rispettive mogli.

(c) Il gioco viene effettuato per n volte. Calcolare:

   i. per $n = 24$, il numero medio di volte in cui tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli;

   ii. per $n = 4$, la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie;

   iii. per $n = 60$, la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie;

   iv. per $n = 15$, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie.

N.B.: Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule della probabilità binomiale e della distribuzione normale:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (e \approx 2.7182, \pi \approx 3.1415).$$

QUESTIONARIO

(a) Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: *due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni.*

Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(b) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto;

2) due punti;

3) infiniti punti;

4) nessun punto.

(c) In un piano sono date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra. Di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ve ne sono:

A) nessuna;

B) una sola;

C) due soltanto;

D) infinite.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare in maniera esauriente la scelta operata.

(d) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'affinità (A) di equazioni:

$$\begin{cases} x = -2X + 3Y \\ \\ y = X - 2Y \end{cases} .$$

Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità (A).

(e) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

scriverla in forma ricorsiva.

(f) Scrivere un algoritmo che generi i primi 20 numeri della successione di cui al precedente quesito 5 e li comunichi sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne.

(g) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ \frac{1}{3}a_{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

.

(h) Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)dt, \text{ con } x > 0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

(i) Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama segmento sferico a due basi. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

(j) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x}{(1 - e^{-t}dt}\sin^2 x,$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

59. **(Sessione Ordinaria, 2004) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$.

(a) Disegnate il grafico G di f.

(b) Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.

(c) Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.

(d) Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \dfrac{4}{9}$.

PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

(a) Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.

(b) Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.

(c) Con $\overline{BC} = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K.

(d) determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

QUESTIONARIO

(a) Trovate due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

(b) Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

(c) Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1, 3) e un minimo relativo in (-1, 2).

(d) Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

(e) Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4.$$

Trovate una espressione di $g(x)$.

(f) Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

(g) Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e d. Quale è il valore di d che massimizza l'area del triangolo?

(h) La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?

(i) Calcolate:

$$\int_0^1 \arcsin x dx.$$

(j) Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

60. **(Sessione Ordinaria, 2004) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

(a) Si studi e si disegni γ;

(b) si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;

(c) sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \dfrac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;

(d) per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta curva standard degli errori o delle probabilità o normale di Gauss (da Karl Friedrich Gauss, 1777-1855). Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{2b}x + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

(a) Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.

(b) Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

QUESTIONARIO

(a) La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?

(b) Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

(c) Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

(d) Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

(e) Dare un esempio di funzione g , non costante, tale che:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4.$$

(f) Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1, 3) e un minimo relativo in (-1, 2).

(g) Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

(h) Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

(i) Si dimostri che l'equazione $e^x + x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.

(j) Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x \to \sqrt{3}x - y \\ y \to x + \sqrt{3}y \end{cases}$$

Di quale trasformazione si tratta?

61. **(Sessione Ordinaria, 2004) - Scuole italiane all'estero - Europa**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano sono assegnati una retta r ed un punto H la cui distanza da r è $\frac{3}{2}$ rispetto ad una data unità di misura delle lunghezze.

(a) Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare sulla retta r due punti A e B tali che il triangolo HAB sia equilatero e trovare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.

(b) Determinare l'equazione in t che risolve la seguente questione:
Condurre, ad una distanza t dal punto H, la retta s parallela ad r in modo che intersechi la circonferenza e il triangolo suddetti e indicare con PQ ed RS le corde che su tale retta s intercettano nell'ordine la circonferenza e il triangolo medesimi, risulti $\overline{PQ} = k\overline{RS}$, dove k è un parametro reale assegnato.

(c) Posto, nell'equazione trovata, $t = X$ e $k^2 = Y$, esprimere Y in funzione di X e, prescindendo dalla questione geometrica, studiare la funzione $Y = Y(X)$ così ottenuta e disegnarne l'andamento.

(d) Utilizzando tale andamento, stabilire per quali valori di k si hanno valori di t che risolvono la questione di cui al punto 2) e quanti sono questi valori di t.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2x},$$

dove a è un parametro reale assegnato.

(a) Dimostrare che esse passano tutte per uno stesso punto A.

(b) Tra le curve assegnate determinare quella che presenta come tangente in A la retta di coefficiente angolare $\frac{23}{18}$.

(c) Dopo aver controllato che la curva K trovata è quella che corrisponde al valore 1 di a, studiarla e disegnarne l'andamento.

(d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalla retta di equazione: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

QUESTIONARIO

(a) Considerare la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$, calcolare, qualora esistano, i suoi limiti per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

(b) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx$. È allora possibile calcolare il valore di:

$$[A] \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} f(\frac{x}{2})dx; [B] \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(\frac{x}{2})dx; [C] \int_0^{\sqrt{2}} f(\frac{x}{2})dx; [D] \int_0^{2\sqrt{2}} f(\frac{x}{2})dx$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(c) Dimostrare la formula che fornisce la somma di n numeri in progressione geometrica.

(d) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

(e) La retta r è perpendicolare nel vertice A al piano del quadrato $ABCD$. Indicato con E un qualsiasi punto di r, dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice E e base $ABCD$ sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti.

(f) Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle indeterminate x, y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{17}{4} \\ \\ x^3y^3 = 1 \end{cases}$$

Ogni sua soluzione rappresenta le coordinate di un punto del piano cartesiano (Oxy). Calcolare quanti e quali punti rappresenta il sistema.

(g) Una classe è formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo.

62. **(Sessione Ordinaria, 2004) - Scuole italiane all'estero, America - emisfero boreale**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 cm, si determini:

(a) Il cono C di volume massimo e il valore, espresso in litri, di tale volume massimo.

(b) Il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C.

(c) Il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2} \quad (1)$$

(a) Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:

   i. i valori di a, b, c sono 0 o 1;
   ii. il grafico G di f passa per (-1,0);
   iii. la retta $y = 1$ è asintoto di f.

(b) Si disegni G.

(c) Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto, il grafico G e le rette $x = 0$ e $x = 2$.

QUESTIONARIO

(a) La coppia (1,2) è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?

(b) Sia α tale che la funzione $f(x) = \alpha x - \dfrac{x^3}{1+x^2}$ risulti crescente. Provare che $\alpha \geq \dfrac{9}{8}$.

(c) Mostrare che le tangenti alla curva $y = \dfrac{\pi \sin x}{x}$ in $x = \pi$ e $x = -\pi$ si intersecano ad angolo retto.

(d) Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?

(e) Calcolare:
$$\int_0^\pi e^x \cos x dx.$$

(f) Si dica quante sono le soluzioni dell'equazione $\dfrac{x}{10} = \sin x$ e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.

(g) Se $\tan\alpha$ e $\tan\beta$ sono radici di $x^2 - px + q = 0$ e $\cot\alpha$ e $\cot\beta$ sono le radici di $x^2 - rx + s = 0$, quanto vale il prodotto rs espresso in funzione di p e q?

(h) Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

63. **(Sessione Ordinaria, 2004) - Scuole italiane all'estero - America Latina**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnata una piramide retta a base quadrata il cui spigolo laterale misura a.

Si determini:

(a) la piramide P di volume massimo e il rapporto di questo con il volume del cubo di spigolo unitario.

(b) di quanto si deve ridurre l'altezza di P per ridurne il volume del 10% mantenendo inalterata la forma della piramide

(c) la capacità in litri della sfera circoscritta a P quando $a = 1.2 metri$.

PROBLEMA 2

La curva λ e la retta r hanno equazioni rispettive:

$$\lambda : y = x^3 - 15x - 4r := y = mx$$

(a) Si denotino con A e B (A a sinistra di B) le intersezioni, nel secondo quadrante degli assi Ox e Oy, di λ con r, e con R ed S si denotino le regioni finite di piano così individuate: R delimitata da λ e dal segmento AB, S delimitata dall'asse x, da λ e dal segmento AO.

(b) Si determini m in modo che R ed S siano equivalenti.

(c) Si determini l'equazione della curva γ simmetrica di λ rispetto alla retta determinata al punto precedente.

QUESTIONARIO

(a) Si dia un esempio di sistema lineare di due equazioni in due incognite compatibile, la cui soluzione è la coppia (-1, 2) e si esponga il ragionamento seguito.

(b) Quale è la capacità massima di un cono circolare retto di apotema 12cm? Quale ne è il valore in litri?

(c) Si dimostri che la derivata n-esima di un polinomio $P(x)$ di grado n-1 è zero.

(d) Si considerino gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

(e) Se $f(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$, quanti sono i numeri reali k per i quali è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito per giungere alla risposta.

(f) Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 25% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 210 euro quale era il suo prezzo di listino?

(g) Quante soluzioni reali ammette l'equazione $\cos x - \log x = 0$? C'è una radice positiva tra 1 e 2? Si illustri il ragionamento seguito.

(h) Calcolare:

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx.$$

64. **(Sessione Suppletiva, 2004) - Corso di ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$[1] y = \frac{2x(6 - x)}{2 + x}.$$

(a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

(b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

(c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.

(d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.

(e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo ϕ tale che $\cos\phi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

(a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrivibile in una circonferenza γ.

(b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile ad una circonferenza?

(c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.

(d) Dopo aver riferito il piano a ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ.

QUESTIONARIO

(a) La funzione $\dfrac{3x - 2\sin x}{2x - 3\sin x}$ è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$:
A) non esiste; B) è $\dfrac{3}{2}$; C) è $\dfrac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3}{2}$.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(b) Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10000.

(c) Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora F(x) è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora

$F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente, ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

(d) Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 = \ln(x^2).$$

(e) Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:
[A] sempre maggiore di h;
[B] sempre minore di h;
[C] sempre uguale ad h;
[D] a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(f) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

(g) Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.

(h) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)dx$. È allora possibile calcolare:

$$[A] \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; [B] \int_0^3 f(3x)dx; [C] \int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; [D] \int_0^1 f(3x)dx.$$

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(i) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \log(2x - \sqrt{4x-1})$.

(j) Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $\sin\beta = \frac{24}{25}$, ne esistono:
A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

65. **(Sessione Suppletiva, 2004) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$[1] y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

(a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

(b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

(c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.

(d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.

(e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2

Nel Liceo Scientifico *Torricelli* vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

Sezione sesso	A	B	C	D
Maschi	12	10	13	8
Femmine	16	18	15	20

(a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.

(b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.

(c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5^aA, questa sia formata da alunni di sesso:
1) maschile, 2) femminile, 3) differente.
Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?.

(d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.

(e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla $5a$D.

QUESTIONARIO

(a) La funzione $\frac{3x - 2\sin x}{2x - 3\sin x}$è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$:
A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(b) Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10000.

(c) Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora F(x) è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente, ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

(d) Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 = \ln(x^2).$$

(e) Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:
[A] sempre maggiore di h;
[B] sempre minore di h;
[C] sempre uguale ad h;
[D] a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

(f) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

(g) Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

(h) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases} .$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto (1, 0) nel punto (1, -1) e stabilire se ammette rette unite.

(i) Due giocatori, A e B, giocano a 'Testa o Croce' con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: *Il giocatore A lancia la moneta: se esce 'Testa' vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene 'Croce', in caso contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene 'Testa'. In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene 'Croce'. Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato.* Il gioco è equo?

(j) Dopo avere spiegato perché la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x - \cos x}$ è positiva nell'intervallo [1, 2], esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

66. **(Sessione Straordinaria, 2004) - Corso di Ordinamento**

it Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

(a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

(b) Chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

(c) Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p ed il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$.

(d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a\sin x}{\cos x}$$

dove a è un parametro reale.

(a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.

(b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

QUESTIONARIO

(a) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo.

(b) Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.

Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(c) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

(d) Il limite di $\tan x$ per x tendente a $+\infty$:

A) è $+\infty$;

B) è $\frac{\pi}{2}$;

C) non esiste;

D) esiste ma non si riesce a calcolare.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(e) Dimostrare il seguente teorema:

Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a.

(f) Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

(g) Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ ragione, calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}.$$

(h) Calcolare il valore della seguente somma:

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 100^2.$$

(i) In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

(j) Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

67. **(Sessione Straordinaria, 2004) - PNI**

it Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

(a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

(b) Chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

(c) Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p ed il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$.

(d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

PROBLEMA 2

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n e c_n tali che:

$$a_n = \sum_{i,k=1}^{n} ik, b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2, c_n = \sum_{i,k=1 (k \geq i)}^{n} ik.$$

(a) Dimostrare che risulta:

$$a_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

(b) Calcolare il più grande valore di n per cui a_n non supera 100000.

(c) Definire per ricorsione la successione di termine generale c_n.

(d) Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne.

QUESTIONARIO

(a) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo.

(b) Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.

Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(c) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

(d) Il limite di $\tan x$ per x tendente a $+\infty$:

A) è $+\infty$;

B) è $\frac{\pi}{2}$;

C) non esiste;

D) esiste ma non si riesce a calcolare.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(e) Si consideri la seguente implicazione:

Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile nel punto a allora è continua in a.

Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni inversa, contronominale e contraria dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.

(f) Determinare il più grande valore del parametro reale m per cui il valore del seguente integrale:

$$\int_0^m \frac{2x - 3m}{x - 2m} dx$$

non supera 24.

(g) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato un triangolo qualsiasi. Dimostrare le formule che esprimono le coordinate del baricentro del triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.

(h) Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da '1' a '6', aventi tutte le stesse possibilità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un '5'.

Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo.

(i) Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli atleti abbiano le stesse possibilità, calcolare le probabilità che:

i. sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;
ii. almeno uno dei due finisca sul podio;
iii. nessuno dei due finisca sul podio.

(j) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ \\ Y = -x - y + m \end{cases}$$

dove m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

68. **(Sessione Ordinaria, 2005) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola l d'equazione: $y = 6 - x^2$.

(a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.

(b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.

(c) Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R

(d) Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a l nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.

(e) Si determini il valore di t per il quale $A(t$ è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; \infty)$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2logx) + 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

(a) Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0

(b) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty)$, un'unica radice reale.

(c) Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

(d) Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette:$x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$

(e) Si calcoli il limite per $n \to \infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

QUESTIONARIO

(a) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°$, $\sin 36°$.

(b) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinchè sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

(c) Si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.

(d) Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

(e) Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perchè la derivata di e^x è e^x?

(f) Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?

(g) Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

(h) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

(i) Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:

$$\sin^2(35°) + \sin^2(55°)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

(j) Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

69. **(Sessione Ordinaria, 2005) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \text{ e } r : 4y = x + 6.$$

(a) si provi che λ e r non hanno punti comuni;

(b) si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r;

(c) si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x;

(d) si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x;

(e) Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; \infty)$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

(a) Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0

(b) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty)$, un'unica radice reale.

(c) Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

(d) Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette:$x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$

(e) Si calcoli il limite per $n \to \infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

QUESTIONARIO

(a) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°$, $\sin 36°$.

(b) Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $x = -1$.

(c) Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ la cui composizione dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\sigma \circ \phi$.

(d) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinchè sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

(e) Come si definisce e quale è l'importanza del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

(f) Le rette r e s d'equazioni rispettive $y = 1+2x$ e $y = 2x-4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.

(g) Come si definisce $n!$(n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?

(h) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases}$$

nel suo punto di coordinate (3, 4).

(i) Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

(j) Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

70. **(Sessione Ordinaria, 2005) - LICEO GINNASIO 'L. SARU' BRATISLAVA**

SEZIONE BILINGUE ITALO - SLOVACCA

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

PROBLEMA 1

È data l'equazione $y = -ax^2 + bx + c$ dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi.

Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) , interseca l'asse x nei punti O, A ed ha il vertice nel punto V in modo che

(a) il triangolo OAV sia rettangolo

(b) il segmento parabolico individuato dalla corda OA genera un solido di volume $\frac{128}{15}\pi$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O, calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui essa divide il segmento parabolico suddetto .

PROBLEMA 2

Data la curva $y = \dfrac{4x^2 + 1}{3x}$, se ne rappresenti il grafico.

Preso un punto P sull'arco di curva del primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano gli stessi nei punti A e B rispettivamente.

Determinare la posizione del punto P per cui è minima la somma dei segmenti PA e PB.

PROBLEMA 3

Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O , tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza , tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare il limite per x tendente all'infinito del rapporto $k = \dfrac{\overline{AQ} + \overline{BQ}}{\overline{AB}}$.

Studiare quindi la funzione $y = f(x)$ dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

71. **(Sessione Ordinaria, 2005) SEZIONI BILINGUI ITALO-ALBANESI**

   (a) Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY la funzione $F(x) = \dfrac{x^2+1}{4-x^2}$.
   Verificare che le tangenti alla funzione nei punti A e B di ascissa $x = 1$ e $x = -1$, si incontrano in un punto dell'asse delle ordinate.

   (b) Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY le due parabole di equazioni

   $$Y = X^2 - 4X + 1 \text{ e } Y = 1 - X^2$$

   Determinare quindi i punti comuni tra le due parabole e trovare l'area della parte finita di piano compresa tra le due funzioni.

   (c) Dati i due numeri complessi $Z_1 = 3 - 3i$ e $Z_2 = 1 + i$, calcola il prodotto $Z1 * Z2$. Rappresenta nel piano di Gauss il numero complesso così ottenuto e determinarne modulo e argomento.

   (d) Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema

   $$\begin{cases} 3x - 6y - 3z = -2 \\ -3x - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

72. **(Sessione Ordinaria, 2005) - Scuole italiane all'estero**

   Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

   PROBLEMA 1

   La funzione f è definita da $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ dove k è una costante arbitraria.

(a) Si trovino, in funzione di k, i valori di minimo e massimo relativo di f.

(b) Per quali valorid i k, f ha tre zeri reali distinti?

(c) Si trovi il valore di k tale che il valore medio di f nell'intervallo chiuso $[-1; 2]$ sia 1.

(d) Si determini l'area della regione finita delimitata dal grafico di f e dall'asse x quando $k = 32$.

PROBLEMA 2

Siano date la parabola λ e la retta r di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$.

(a) Quale è la distanza minima tra λ e r? E quale ne è il valore?

(b) Siano A e B i punti di intersezione di *lambda* con la retta s di equazione $y = x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima.

(c) Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP.

(d) Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x.

QUESTIONARIO

(a) Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$ si calcoli il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$$

.

(b) Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a $8cm$. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:1? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?

(c) Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se un parallelepipedo a base quadrata, quale ne sono le dimensioni minime?

(d) Quale è cilindro di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?

(e) Quando una funzione f è invertibile? Come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1}? Fai un esempio.

(f) Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili, ma separati da un ostacolo.

(g) Trovare il periodo della funzione: $y = \sin \frac{2}{3}x + \sin \frac{1}{4}x$.

(h) Dimostrare che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno due.

73. **(Sessione Ordinaria, 2005) - Liceo di Lugano 2 - 4 giugno 2005**

Corso di livello approfondito

Sussidi ammessi

(a) Calcolatrice TexasVoyage200 o equivalente;

(b) Tavole:'Formeln und Tafeln'(DMK), 'Tables numériques et formulaires' (CRM), 'Le cifre della matematica' (Arrigo/Beretta);

(c) Riga, squadra, compasso.

Avvertenza

Di seguito sono proposti sei problemi. Ogni problema vale 25 punti.

Per la valutazione si terranno in considerazione le migliori cinque soluzioni.

La nota 6 si ottiene con almeno 100 punti.

PROBLEMA 1

Rispetto a un sistema di riferimento cartesiano ortonormato $Oxyz$ sono dati: i punti: $A(a; 0; 0)$ (con $a \in R$), $B(0; 1; 0), C(0; 0; 2), D(-1; 1; -1)$; la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ y = -2t \end{cases}$$

(a) Sia s la retta d'intersezione del piano BCD con il piano Oyz. Trova la distanza tra le rette r e s.

(b) Considera un prisma triangolare $BCDEFG$ avente gli spigoli laterali BE, CF e DG paralleli alla retta r. Determina le coordinate dei punti E, F, G, in modo che il volume del prisma sia 8 unità cubiche.

(c) Per quali valori di $a \in R$ il piano ABC è perpendicolare al piano Oxy?

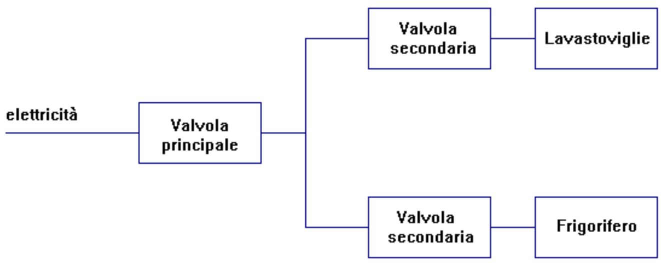
(d) Per quali valori di $a \in R$ il piano ABC definisce con il piano Oxy un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{1}{2}$?

(e) Definisci con un sistema di equazioni cartesiane oppure in forma parametrica il luogo geometrico L dei punti equidistanti dai tre punti A, B, C.

(f) Per quali valori di $a \in R$ il punto $K(6; \frac{1}{2}; 1)$ appartiene a L?

PROBLEMA 2

Un quadro elettrico, che gestisce il funzionamento di una lavastoviglie e di un frigorifero, è rappresentato nel seguente schema.



Il quadro è inizialmente senza valvole.

Nella scatola A ci sono 7 valvole principali, delle quali 2 sono difettose.

Nella scatola B ci sono 7 valvole secondarie, delle quali 3 sono difettose.

Si inseriscono nel quadro una valvola principale, presa a caso dalla scatola A, e due valvole secondarie, prese a caso dalla scatola B.

(a) Quale è la probabilità che entrambi gli apparecchi ricevano corrente?

(b) Quale è la probabilità che non arrivi corrente ad almeno uno dei due apparecchi?

(c) Quale è la probabilità che non arrivi corrente né alla lavastoviglie né al frigorifero?

(d) Quale è la probabilità che i due apparecchi non ricevano corrente e che, sostituendo la valvola principale (con una valvola presa a caso fra le valvole restanti della scatola A), la ricevano?

(e) Ammesso che non arrivi corrente né alla lavastoviglie né al frigorifero, si può tentare di risolvere il problema in due modi:

Primo modo: Si sostituisce la valvola principale con una valvola presa a caso tra le valvole restanti della scatola A.

Secondo modo: Si sostituiscono le due valvole secondarie con due valvole prese a caso tra le valvole restanti della scatola B.

Quale dei due modi di procedere ha più probabilità di successo?

PROBLEMA 3

Il seguente esercizio è composto da due parti indipendenti. Sono richiesti i calcoli completi.

(a) È data la funzione:

$$f : C \to C, z \mapsto f(x) = \frac{1}{1 - z + i}$$

(b) Risolvi l'equazione: $f(z) = i$;

(c) Risolvi l'equazione: $f(z) = -z \cdot i$;

(d) Determina e rappresenta nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in C, Re(f(z)) = 1\}$$

(e) Sia a un numero complesso non nullo.
Dimostra che la somma delle soluzioni dell'equazione $z^3 = a$ è uguale a 0 (zero).

PROBLEMA 4

Sono richiesti i calcoli completi.

È data la funzione reale

$$f : x \mapsto y = e^{ax}$$

dove a è un parametro reale.

(a) Studia la funzione f. In che modo il valore del parametro a influenza la forma del grafico di f? Esamina in particolare il comportamento asintotico, il tipo di estremi e il numero di flessi e illustra le varie situazioni con dei grafici-tipo.

(b) Per quale valore del parametro a il grafico di f possiede due punti di flesso nei quali le tangenti al grafico sono perpendicolari fra loro?

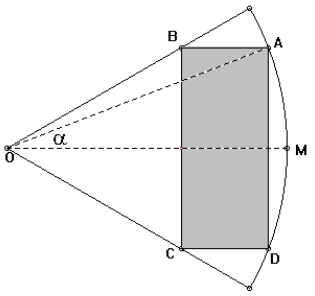
PROBLEMA 5

Sono richiesti i calcoli completi.

La figura mostra un settore circolare con vertice O, raggio r e angolo al centro di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ in radianti.

Sia α l'ampiezza in radianti dell'angolo .

Nel settore circolare viene inscritto un rettangolo $ABCD$ con due lati paralleli alla bisettrice OM del settore: i vertici A e D appartengono dunque all'arco del settore, i vertici B e C ai due raggi.



(a) Esprimi al variare di α l'area del rettangolo $ABCD$.

(b) Per quale valore di α il rettangolo ha area massima? Quali sono le sue dimensioni?

Sono richiesti i valori esatti.

(c) Verifica se il rettangolo di area massima è anche quello di perimetro massimo.

PROBLEMA 6

Il seguente esercizio è composto da tre parti indipendenti.

(a) Considera il rettangolo della figura. Esso viene diviso dai grafici delle funzioni reali $x \mapsto y = \tan x$ e $x \mapsto y = m \sin x$ $(m \in [0, 1])$ in tre regioni piane A, B, C.

Determina m sapendo che A e B hanno ugual area.

(b) Per $n \in N^*$ si considerano le successioni (a_n) e (v_n), i cui termini n-esimi sono così definiti:

- a_n è l'area della figura F_n delimitata dalla curva $y = \frac{1}{x}$, dall'asse x e dalle rette verticali $x = 2^{n-1}$ e $x = 2^n$;
- v_nè il volume del solido ottenuto ruotando la figura F_n attorno all'asse x.

Dimostra che (a_n) è costante e che (v_n) è una progressione geometrica.

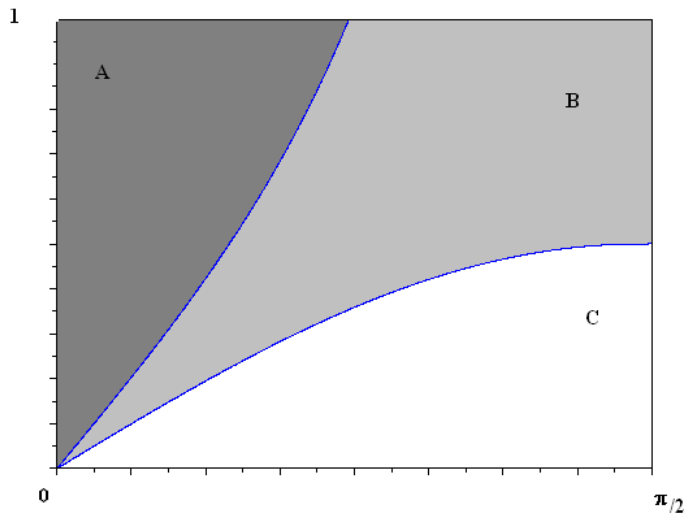
(c) Per $n \in N^*$ si considerano le successioni (s_n), (c_n) e (u_n), i cui termini n-esimi sono così definiti:

$$s_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx, s_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx, u_n = \frac{s_{n+1}}{c_n}$$

Dimostra che la successione (u_n) è una progressione aritmetica.

Consiglio: esprimi s_{n+1} in funzione di c_n.

74. **(Sessione Ordinaria, 2005) - America emisfero boreale**


1
A
B
C
0
π/2

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:

PROBLEMA 1

Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC e contiene il centro della circonferenza k circoscritta ad esso. Condotta la retta t tangente a k in C, indicare con D la proiezione ortogonale di A su t e con E quella di A su BC.

(a) Dimostrare che i triangoli ACD e ACE sono congruenti.

(b) Ammesso che le misure del raggio della circonferenza k e del segmento AE, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano $\frac{5}{4}$ e 2, riferire il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), in modo però che l'asse x sia parallelo alla retta BC. Trovare:

   i. le coordinate dei punti B, C, D;

   ii. l'equazione della circonferenza k;

   iii. l'equazione della parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti B, C, D.

(c) Stabilire analiticamente se la circonferenza k e la parabola p hanno altri punti in comune oltre ai punti B e C.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = x^4 + ax^2 + b,$$

dove a e b sono parametri reali.

(a) Determinare a quali condizioni devono soddisfare tali parametri affinché la corrispondente curva sia situata nel semipiano $y \geq 0$.

(b) Esistono valori di a e b tali che la curva corrispondente sia situata nel semipiano $y < 0$?

(c) Tra le curve assegnate indicare con K quella che ha un minimo relativo uguale a 0 ed un massimo relativo uguale ad 1.

(d) Controllato che la curva K si ottiene per $a = -2$ e $b = 1$, disegnarla.

(e) Calcolare infine le aree delle regioni in cui la curva K divide il cerchio di centro O e raggio 1.

QUESTIONARIO

(a) Nello spazio si considerino tre rette a, b, c, comunque scelte, ma alle seguenti condizioni: la retta a è strettamente parallela alla retta b e la retta b è strettamente parallela alla retta c. Si può concludere che le rette a, c non hanno punti in comune? Fornire una esauriente motivazione della risposta.

(b) Un piano g interseca i due piani a e b, paralleli in senso stretto, rispettivamente secondo le rette a e b. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette? Fornire esaurienti spiegazioni della risposta.

(c) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione 2^x è $2^x \ln 2$, esplicitando ciò che si ammette.

(d) Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^7$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

(e) In una fabbrica lavorano 35 operai e 25 operaie. Si deve formare una delegazione comprendente 3 operai e 2 operaie. Quante sono le possibili delegazioni?

(f) Calcolare il limite della funzione

$$\frac{2x - \sin 3x}{3x + \cos 2x}$$

per x tendente a $+\infty$. È vero o falso che si può ricorrere al teorema di De L'Hôpital? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(g) Calcolare, se esiste, la funzione $f(x)$ tale che $\int_0^t f(x)dx = t^2 + \sqrt{t}$.

75. **(Sessione Ordinaria, 2005) - Calendario australe**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ e sia $F(x)$ la sua primitiva tale che $F(1) = f(1)$. Siano inoltre ϕ e Φ le curve rappresentative rispettivamente di ϕ e Φ.

(a) Nel piano riferito ad assi cartesiani, ortogonali e monometrici, si disegnino ϕ e Φ?;

(b) si determinino le coordinate dei punti comuni a ϕ e Φ e le equazioni delle tangenti alle due curve in tali punti;

(c) si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta $x + 2 = 0$.

PROBLEMA 2

Il triangolo ABC ha il lato BC che è il doppio di CA di lunghezza k mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, ha il cateto AB che è il doppio di BD.

(a) Si esprima l'area del quadrilatero $ADBC$ in funzione dell'angolo ACB;

(b) si determini il valore di $A\hat{C}B$ cui corrisponde il quadrilatero di area massima;

(c) di tale quadrilatero si determini area e perimetro.

QUESTIONARIO

(a) Prova che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte di quella del cono.

(b) S_n indica la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $\frac{1}{3}$ e ragione $\frac{1}{3}$. Calcola il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}.$$

(c) Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 10cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?

(d) Considera la cubica $y = x^3$ e illustra le variazioni che intervengono nel suo grafico per l'aggiunta ad x^3 di un termine kx al variare di k nell'insieme dei numeri reali.

(e) Due lati di un triangolo misurano a e b. Determina il terzo lato in modo che l'area sia massima.

(f) Calcola la derivata della funzione $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

(g) Cosa puoi dire della funzione? È costante? Illustra il perché della tua risposta.

(h) Spiega come utilizzeresti il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.

(i) Quando una funzione f è invertibile? Come si può calcolare la derivata della funzione inversa? Fai un esempio.

76. **(Sessione Suppletiva, 2005) - Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

(a) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(b) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

   i. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;

   ii. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;

   iii. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;

iv. calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC ed MNP;

v. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

PROBLEMA 2.

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

(a) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.

(b) Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.

(c) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

(d) Calcolare il valore di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

(e) Dopo aver controllato che il valore $\overline{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\overline{\gamma}$ e $\overline{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$.

QUESTIONARIO.

(a) È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

(b) Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

(c) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k + \frac{\pi}{12} + k\pi$ (k intero qualsiasi).

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

(d) Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)x^2-(2k-1)x+(k+1)=0$, dove k è un parametro reale diverso da 2.

Indicate con x_1 ed x_2 le sue radici, calcolare i limiti di x_1+x_2 quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

(e) Il limite della funzione $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:

[A] è uguale ad 1;

[B] è uguale a $+\infty$;

[C] non esiste;

[D] è uguale ad e;

[E]è uguale ad $\frac{1}{e}$,

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

(f) Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche: $f(1)=1, f'(1)=0, f''(1)<0$.

(g) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x+my=1$ e $mx-2y=2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

(h) È vero o falso che le due funzioni $\log(x^2-4)$ e $\log(x+2)+\log(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(i) Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^1 0$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

(j) Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

77. **(Sessione Suppletiva, 2005) - Sperimentazione PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

(a) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(b) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

   i. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;

   ii. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;

   iii. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;

   iv. dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;

   v. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

PROBLEMA 2.

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

(a) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.

(b) Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.

(c) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

(d) Calcolare il valore di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

(e) Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

QUESTIONARIO

(a) È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

(b) Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

(c) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12} + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}$ (k intero qualsiasi).

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

(d) Si consideri la seguente equazione in $x : (k-2)x^2-(2k-1)x+(k+1) = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x_1 ed x_2 le sue radici, calcolare i limiti di $x_1 + x_2$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $infty$.

(e) Il limite della funzione $(1 - x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:

[A] è uguale ad 1;

[B] è uguale a ∞;

[C] non esiste;

[D] è uguale ad e;

[E] è uguale ad $\frac{1}{e}$,

essendo e la base dei logaritmi naturali. Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

(f) Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni x di un dato intervallo J, allora $f(x)$ è costante in J.

(g) Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.

(h) In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

(i) Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.

Il sistema è:

[A] determinato per ogni valore di a;

[B] indeterminato per un valore di a ed impossibile per un valore di a;

[C] indeterminato per nessun valore di a, ma impossibile per un valore di a;

[D] impossibile per nessun valore di a, ma indeterminato per un valore di a.

Un sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

(j) Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x + my - 1 \\ y' = mx - 2y - 2 \end{cases}$$

dove m è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

78. **(Sessione Suppletiva, 2005) - Scuole italiane all'estero - calendario australe**

Il candidato svolga uno dei problemi e quattro quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Si consideri l'equazione $y = x^3 - ax + b$.

(a) Si determinino a e b in modo che la sua curva rappresentativa Γ sia tangente, nel punto A di ascissa -1, alla retta r d'equazione $y = 4$. Si disegni Γ.

(b) La retta r incontra Γ in un altro punto B. Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal segmento AB e da Γ.

(c) Si determini l'equazione della retta s per l'origine degli assi che delimita con Γ e con l'asse y una regione finita di piano, nel secondo quadrante, di area $\frac{5}{4}$.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $f(x) = \sin x + a\cos x + b$, con $x \in [-\pi, \pi]$

(a) Calcolate a e b in modo che $x = \frac{\pi}{6}$ sia punto di massimo relativo e $f(\frac{\pi}{6}) = 0$;

(b) tracciate il grafico λ della funzione così ottenuta e dite se essa ha un massimo assoluto e un minimo assoluto;

(c) calcolate l'area della regione finita di piano delimitata dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa nulla, da λ e dalla retta $x = \frac{\pi}{2}$.

QUESTIONARIO

(a) L'equazione $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ esprime il teorema del valore medio o di Lagrange. Determinare c quando $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0, b = 1$.

(b) Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un prisma regolare a base triangolare, quali ne sono le dimensioni minime, espresse in metri?

(c) Quale è il cono di volume massimo inscrivibile in una sfera di assegnata?

(d) La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è invertibile? Perché? Quale ne è la derivata? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1}?

(e) Dimostrare che la funzione $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in $(0, 1]$. In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali -1?

(f) Fra tutte le primitive di $f(x) = 3\cos^3 x$ trovare quella il cui grafico passa per il punto $(0, 5)$.

(g) Spiegare perché l'equazione $3^x = -x^2 + 5x - 8$ non ammette soluzioni.

(h) Perché tutte le tangenti alla curva di equazione $y = x^3 + 3x - 4$ formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x? Illustra le ragioni della tua risposta.

79. **(Sessione Straordinaria, 2005) - Corso di ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

(a) Dimostrare che:
   i. EC è perpendicolare a CB;
   ii. I triangoli EFC ed AFD - dove F è il punto comune ai segmenti ED ed AC - sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
   iii. EA è parallela a CB;
   iv. Il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

(b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
   i. le coordinate dei punti A, B, C, D, E;
   ii. l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero $AECD$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$[1] y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$$

(a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

(b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

(c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2, 2).

(d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

(e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

QUESTIONARIO

(a) Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano a equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano a.

(b) Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati $ABDE, BLFG$ e $CAHL$. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.

(c) Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

$$\log_2 27 + \log_2 12, 2 + \log_2 81.$$

, Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

(d) Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

(e) Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ non supera 10000.

(f) Dimostrare che il limite di $\cos x$, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

(g) Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$.

(h) Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x)dx, \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

(i) Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

, dove n, k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$. Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del 'triangolo di Tartaglia' (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 ca. - 1557): enunciarla.

(j) Calcolare quante sono le possibili 'cinquine' che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

80. **(Sessione Straordinaria, 2005) - Sperimentazione Brocca**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

(a) Dimostrare che:

   i.)EC è perpendicolare a CB.

   ii. I triangoli EFC ed AFD - dove F è il punto comune ai segmenti ED ed AC - sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti.

   iii. EA è parallela a CB.

iv. Il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

(b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

i. Il seno e il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$.

ii. Le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo ADC.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$[1] y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$$

(a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

(b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

(c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2, 2).

(d) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

(e) Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x.

QUESTIONARIO

(a) Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

(b) Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati $ABDE, BCFG$ e $CAHL$. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.

(c) Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

$$\log_2 27 + \log_2 12, 2 + \log_2 81$$

Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

(d) Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

(e) Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^2 ,$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come 'teorema di Nicomaco' (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

(f) Il limite della funzione $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$, per $x \to +\infty$, è:
[A] e; [B]$\frac{1}{e}$; [C]$\sqrt{e}$; [D] $\frac{1}{\sqrt{e}}$,
dove e è la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

(g) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione: $\int_{-x}^{2x} \frac{dx}{\sin x}$.

(h) Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.

(i) Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?

(j) Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il '47' sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'11-esima estrazione?

81. **(Sessione Ordinaria, 2006) - Corso di ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

(a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

(a) la somma delle due aree sia minima?
(b) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

(a) Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
(b) Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
(c) Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

(a) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero di chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

(b) I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

(c) Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50cm^2$, margini superiore e inferiore di $4cm$ e margini laterali di $2cm$. Quali sono le dimensioni del foglio di carta d area minima che si può utilizzare?

(d) La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

(e) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

(f) L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

(g) La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0;1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

(h) La funzione $f(x) = \tan x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

(i) Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

(j) La funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

82. **(Sessione Ordinaria, 2006) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

(a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

(a) la somma delle due aree sia minima?

(b) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

(a) Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

(b) Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette di equazioni $y = -1$ e $y = -2$.

(c) Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

(a) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero di chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

(b) I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

(c) In un piando sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. si trovi il più breve cammino che congiunga A e B toccando r.

(d) Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

(e) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

(f) L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

(g)

(h) Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: *che cos'è la probabilità?* era solito rispondere: *la probabilità non esiste!*. Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

(i) Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0.3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità ≥ 0.99 di colpirlo almeno una volta?

(j) Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

(k) Tenuto conto che:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

83. **(Sessione Ordinaria, 2006) - Scuole italiane all'estero - Europa**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Siano λ e γ le curve d'equazioni rispettive $y = e^x$ e $y = e^{-x}$

(a) Si disegnino λ e γ; si indichi con P il loro punto comune e si indichino con A e B le loro intersezioni rispettive con una retta di equazione $y = k(k > 0)$.

(b) Se $k < 1$, si determini il rettangolo di area massima che ha i vertici in A, B e nelle proiezioni di questi sull'asse x.

(c) Se $k > 1$, si determini k in modo che risulti uguale a 2 l'area racchiusa tra la retta e i due archi PA e PB.

(d) Si determini il volume del solido la cui base è la regione di area 2 prima determinata e tale che le sue sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x siano tutte rettangoli la cui altezza è 3 volte la base.

PROBLEMA 2

Sia T il tetraedro regolare di lato 1.20m.

(a) Si calci il volume, espresso come capacità in litri, di T.

(b) Quanti piani paralleli alla base dividono T in due parti i cui volumi sono nel rapporto 2:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice di T?

(c) Come deve condursi un piano α parallelo alla base affinché il prisma le cui basi sono le sezioni di T con α e la sua proiezione ortogonale sulla base di T, abbia volume massimo?

QUESTIONARIO

(a) Un foglio di carta deve contenere $80cm^2$ di stampa con margini superiore e inferiore di 3 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

(b) L'equazione risolvente un dato problema è: $k \sin x - 3k + 1 = 0$ dove k è un parametro reale e x, per soddisfare le condizioni del problema, deve essere $30° < x60°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

(c) La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è invertibile? Perché? Quali sono le derivate di f e di f^{-1}? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa?

(d) Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ e la tangente t al suo grafico nel punto di ascissa $x = 2$. Quale è la pendenza di t?

(e) In determiante condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?

(f) Disegnare il grafico di una funzione la cui pendenza sia sempre maggiore di 1.

(g) Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione e^x.

(h) Il dominio della funzione $f(x) = 3 \arctan x - \arctan \dfrac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$, è l'unione di tre intervalli. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione è costante in ciascuno di essi; indi si calcoli il valore di tale costante.

84. **(Sessione Ordinaria, 2006) - Scuole italiane all'estero, America**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^2 + \frac{b}{x}$$

dove a, b sono parametri reali.

(a) Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate (2,3) e (-2,5) e indicarla con γ.

(b) Studiare la curva γ e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.

(c) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dalla sua retta $y = 5$.

(d) Utilizzando il disegno di γ, trovare quante soluzioni ammette l'equazione $x^3 - kx - 2 = 0$, per $-2 < x < 2$, essendo k un parametro reale.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p' di equazione:

$$y = ax^2,$$

dove a è un numero reale positivo assegnato.

(a) Condotta una generica retta t per il fuoco F della parabola p' e chiamato M il punto medio del segmento che p' intercetta su t, trovare le funzioni $x(k)$ ed $y(k)$ che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di M per mezzo della pendenza k della retta t.

(b) Considerate le equazioni $x = x(k)$ e $y = y(k)$ ed eliminato il parametro k fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola p'' (è chiamata luogo del punto M al variare di t nel fascio di centro F).

(c) Calcolare l'area A della regione piana R delimitata dalle parabole p' e p'' e dalle rette $x = 0$ e $x = 2a$.

(d) Trovare il valore di a per il quale l'area A è uguale a $\frac{13}{24}$ e, in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse delle y.

QUESTIONARIO

(a) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \sin^2(2x)$.

(b) Si consideri la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali.

Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.

(c) Si indichi con α l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di α, espressa in radianti e:

$$[A]\,\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3};\,[B]\,\arccos\frac{\sqrt{3}}{6};\,[C]\,\arctan\frac{\sqrt{6}}{3};\,[D]\text{un valore diverso.}$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Considerata l'equaizone: $x^4 + x - 2 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione razionale.

(e) In un cono equilatero di apotema a inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo;

(f) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ ammette derivata nulla in tutti i punti de un intervallo J, tranne che nel punto a di J, dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione $f(x)$ è costante in J? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

(g) Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Esso è uguale a:

$$[A]e^2; [B]\frac{1}{e^2}; [C]\sqrt{e}; [D]\frac{1}{\sqrt{e}},$$

dove e è il numero di Nepero.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

85. **(Sessione Suppletiva, 2006) - Corso di ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, x = y^2 - 2y.$$

(a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

(b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.

(c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

(d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y ed area massima.

(e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

(a) Dimostrare che che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.

(b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.

(c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.

(d) Determinare l'equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull'asse y.

(e) Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c.

QUESTIONARIO

(a) Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genere un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

(b) Il numero delle soluzioni dell'equazione $\sin 2x \cos x = 2$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è:

$$[A]0; [B]2; [C]3; [D]5.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(c) Il limite della funzione $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, per $x \to 0$ è:

$$[A]\text{non esiste}; [B]0; [C]\text{è un valore finito diverso da } 0; [D]+\infty.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \tan x$.

(e) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al 'primo'.

(f) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

(g) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$ allora $f(x) > M$.

È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

(h) È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo (n-1)-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende ad ∞.

(i) Si consideri la seguente uguaglianza: $\log(2x+1)^4 = 4\log(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(j) Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia '1', posta a capotavola, è riservata al ragazzo '1', che è il caposquadra,mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

86. **(Sessione Suppletiva, 2006) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, x = y^2 - 2y.$$

(a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

(b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.

(c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

(d) Le due parabole p' e p'' sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.

(e) Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali $Oxy)$, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

(a) Dimostrare che che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.

(b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.

(c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.

(d) Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB.

(e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dalla retta r e dall'asse delle x.

QUESTIONARIO

(a) Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genere un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

(b) Il numero delle soluzioni dell'equazione $\sin 2x \cos x = 2$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è:

$$[A]0; [B]2; [C]3; [D]5.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(c) Il limite della funzione $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, per $x \to 0$ è:

$$[A]\text{non esiste}; [B]0; [C]\text{è un valore finito diverso da } 0; [D] + \infty.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(d) Dimostrare che la funzione $f(x) = x^a$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

(e) Il seguente teorema esprime la condizione di integrabilità di Mengoli-Cauchy:

Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$*, è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.*

Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

(f) Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(x) + c$$

dove c è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(g) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al 'primo'.

(h) Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

(i) Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precision: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

(j) In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

87. **(Sessione Straordinaria, 2006) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1.

É dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \tan \hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB.

(a) scrivere l'equazione della circonferenza k;

(b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;

(c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

(d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

(e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

Problema 2.

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2; \frac{64}{15}\right)$.

(a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

(b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

(c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

(d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v $(u < v)$ le ascisse dei punti distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)dx.$$

(e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

Questionario.

(a) É assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decano regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).

(b) Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

(c) Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambi tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to a$. É vero o falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(d) Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$:

$$[A] \text{ è } 0; [B] \text{ è un valore finito diverso da } 0; [C] \text{ è } +\infty; [D] \text{ è } -\infty.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(e) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione $\arctan x$ è $\dfrac{1}{1+x^2}$.

(f) Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$, nell'intervallo $[-1; 1]$.

(g) Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^3 + x^2 + 1 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[x; z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

(h) Considerata l'equazione $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.

(i) Considerata l'equazione $\cos\dfrac{x}{2}\sin(2x) = 12$, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.

(j) Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola Maria e fra i maschi un solo Antonio. Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti Maria e Antonio?

88. **(Sessione Straordinaria, 2006) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1.

É dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \tan \hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB.

(a) scrivere l'equazione della circonferenza k;

(b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;

(c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

(d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

(e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

Problema 2.

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2; \frac{64}{15}\right)$.

(a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

(b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

(c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

(d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v $(u < v)$ le ascisse dei punti distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)dx.$$

(e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

Questionario.

(a) É assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decano regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).

(b) Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

(c) Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambi tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to a$. É vero o falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(d) Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$:

$$[A] \text{ è } 0; [B] \text{ è un valore finito diverso da } 0; [C] \text{ è } +\infty; [D] \text{ è } -\infty.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(e) Il limite della funzione $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, per $x \to 0$, è uguale ad 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di de L'Hôpital.

(f) Si ricorda la seguente definizione: *Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, ogni funzione $F(x)$, derivabile in I e tale che $F'(x) = f(x)$, si dice primitiva di $f(x)$ in I.* Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 \text{ se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

ammette primitiva nell'intervallo [1;3].

(g) Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[x; z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

(h) Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di 10^{-3}, della soluzione reale della precedente equazione.

(i) Si considerino le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax - (a-1)y + 1 \\ y' = 2ax + (a-1)y + 2 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.

Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano: 1) un'affinità; 2)un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice *equivalente* se conserva le aree).

(j) Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola Maria e fra i maschi un solo Antonio. Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti Maria e Antonio?

89. **(Sessione Ordinaria, 2007) - Corso di Ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Si considerino i triangoli la cui base è $\overline{AB} = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

(a) Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

(b) Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.

(c) si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).

(d) Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Problema 2 Si consideri un cerchio C di raggio r.

(a) Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.

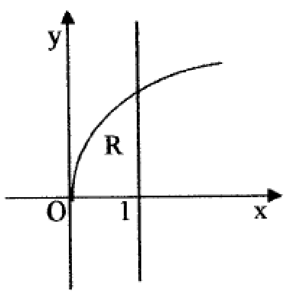
(b) Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.

(c) Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.

(d) Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Questionario

(a) La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



(b) Le misure dei lati di un triangolo sono 40,60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

(c) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0.$$

(d) Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

(e) Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo [-2,2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

(f) Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

(g) Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2,2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?

Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

(h) Si risolva l'equazione: $\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$.

(i) Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

è in accordo con il suo significato geometrico.

(j) Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

90. **(Sessione Ordinaria, 2007) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da $g(x) = a^x + a^{-x}$.

(a) Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.

(b) Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.

(c) Si calcoli $\int_0^t \dfrac{1}{f(x)} dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.

(d) Veritificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una proce3dura numerica che consenta di approssimare tale valore.

Problema 2

Si considerino i triangoli la cui base è $\overline{AB} = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

(a) Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

(b) Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.

(c) si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).

(d) Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Questionario

(a) Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

(b) La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

(c) Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

(d) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

(e) Si consideri il teorema: *la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto* e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con un disegno.

(f) Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

(g) Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1,2).

(h) A *Leonardo Eulero* (1707 - 1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: *Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare.*

(i) Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

(j) Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

91. **(Sessione Ordinaria, 2007) - Scuole italiane all'estero - Europa**

Problema 1

Si consideri la parabola Γ d'equazione $f(x) = x^2 + 1$.

(a) Sia $A(a, b)$ un punto di Γ. Si dimostri che, qualsiasi sia $a \in \mathbf{Z}$, l'ordinata b non è mai un multiplo di 43.

(b) Sia $C(h, k)$ il centro di una circonferenza tangente a Γ nel punto (1,2). Si determini l'equazione del luogo geometrico descritto da C.

(c) Si tracci il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$. La funzione ha punti di flesso?

(d) Sia

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$$

.Si calcoli il limite per t tendente ad infinito di $F(t)$ e si interpreti il risultato geometricamente.

Problema 2

Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Si disegni il grafico di f;

(b) si mostri che f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o *Teorema di Lagrange*) sull'intervallo [0,2]; si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne espliciti il significato geometrico;

(c) il dominio piano del secondo quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S.

Questionario

(a) Si calcolino le radici dell'equazione $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$.

(b) Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$:

$$f : x \to 2?x + 1,\ g : x \to 2^x + 1,\ h : x \to 2^{|x|},\ k :\to 2^{-x}.$$

(c) Quante cifre ha il numero 7^{60} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.

(d) La formula seguente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

è dovuta a *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita. Per dimostrarla può essere utile ricordare che è

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

Si illustri il ragionamento seguito.

(e) Si vuole che delle due radici reali dell'equazione: $x^2+2(h+1)x+m^2h^2 = 0$ una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m?

(f) Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Si determini $f(x)$, sapendo che $f(0) = 4$.

(g) Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$.

(h) Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? Si può calcolare il rapporto fra le aree del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

92. **(Scuole italiane all'estero, 2007) - Americhe**

Problema 1

Si consideri la parabola Γ d'equazione $f(x) = 1 - x^2$.

(a) Si trovi il luogo geometrico Λ dei centri (a, b) delle circonferenze che sono tangenti a Γ nel suo punto di ascissa 1.

(b) Si calcoli l'area del dominio piano delimitato da Λ e Γ.

(c) Si tracci il grafico della funzione $\dfrac{1}{f}$.

(d) Si considerino i due domini piani, ricadenti nel terzo e quarto quadrante, delimitati dai grafici di f e $\dfrac{1}{f}$ nella striscia $-1 \leq y \leq -2$ e se ne calcoli l'area.

Problema 2

Della parabola γ si sa che passa per i punti $A(0; 2)$ e $B(2; 0)$, ha l'asse y e volge la concavità nel verso negativo di tale asse; inoltre l'area del dominio piano delimitato da γ e dai segmenti OA e OB è $\dfrac{10}{3}$.

(a) Si determini l'equazione di γ e se ne tracci il grafico.

(b) La retta s di equazione $y = mx+2$, dove m è un parametro reale, interseca γ in A e in C. Si esprimano in funzione di m le coordinate di C.

(c) Si studi la funzione $f(m) = \overline{AC}^2$ e se ne tracci il grafico λ.

(d) Si dica quale posizione assume la retta s in corrispondenza dell'estremo relativo della curva λ.

Questionario

(a) Si dimostri che fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

(b) Quando due rette si dicono sghembe? Come si definisce la distanza tra due rette sghembe?

(c) Si calcolino le radici dell'equazione: $3^{x+3} + 9^{x+1} = 10$.

(d) Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$:

$$f : x \to 3^{x+1},\ g : x \to 3^x + 1,\ h : x \to 3^{|x|},\ k : x \to 3^{-x}.$$

(e) Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Si dimostri che:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

(f) Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni suo punto P uguale al quadruplo della radice cubica dell'ascissa di P. Si determini $f(x)$, sapendo che il grafico passa per il punto $A(1-1; 0)$.

(g) Un cerchio ha il raggio 1 metro. Quanto misura il lato del decagono regolare in esso inscritto? E quale è la misura del alto del decagono regolare circoscritto?

(h) Il valore della seguente espressione:

$$\int_0^1 \arccos x dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - 2\arcsin x)dx$$

è $\frac{\pi - 1}{2}$. Spiegarlo in maniera esauriente.

93. **(Sessione Suppletiva, 2007) - Corso di Ordinamento**

Problema 1

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri il punto $A(2;0)$.

(a) Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

(b) Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.

(c) Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.

(d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x.$$

(a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

(b) Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.

(c) Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della retta di equazione $x = \ln 3$.

Questionario

(a) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x^2 \cos x}{x^2 - \sin^x}$, quando x tende a 0.

(b) Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \arcsin(\tan x)$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.

(c) Si calcoli il valore medio della funzione $y = \tan^2 x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

(d) Si provi che la funzione $f(x) = x^3 - 8$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi che il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

(e) Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

(f) Si consideri la seguente proposizione: *Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta.* Si dica se è vera falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

(g) Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

(h) Si determini l'area della regione piana limitata nella curva di equazione $y = e^x$, dalla curva di equazione $y = x^3$ e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

(i) Si determinino le equazioni deli asintoti della curva $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x + 2}$.

(j) Si risolva la disequazione:

$$\binom{x}{3} > \frac{15}{2} \binom{x}{2}.$$

94. **(Sessione Suppletiva, 2007) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3^t)dt.$$

(a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

(b) Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel suo punto di ascissa $\log 2$.

(c) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = \log 3$.

(d) Tenuto conto che

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

si calcoli un valore approssimato di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Problema 2.

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto $A(2; 0)$.

(a) Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

(b) Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.

(c) Si scriva l'equazione della parabola cubia $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.

(d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

QUESTIONARIO

(a) Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse e della regione finita di piano delimitata dalla curva $y = \dfrac{2}{x}$ e dalla retta di equazione $y = -x + 3$.

(b) Si calcoli il valore medio della funzione $y = \sin^3 x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

(c) Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, nell'intervallo chiuso [1,2], si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

(d) Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

(e) Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità ce esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.

(f) Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b è $S = \pi ab$.

(g) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$, quando x tende a 0.

(h) Si verifichi che la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2 - 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

(i) Si risolva la disequazione $5 \binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}$.

95. **(Sessione Straordinaria, 2007) - Corso di Ordinamento**

Problema 1

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia $BC = AB$.

Essendo un punto P un punto della circonferenza:

(a) Si esprima per mezzo di r e dell'ampiezza dell'angolo $x = A\hat{B}P$ il rapporto:

$$y = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{AP} \cdot \overline{PB}}.$$

(b) Si studi nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione $y = f(x)$ espressa per mezzo di $\tan x$.

(c) Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di x, nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, per cui il rapporto y assume valore minimo.

(d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $y = f(x)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

Problema 2

Si consideri la funzione $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 4}$.

(a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

(b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei punti in cui essa incontra l'asse x e si calcoli l'area del triangolo formato dalle suddette tangenti e dall'asse x medesimo.

(c) Si studi la funzione derivata $f'(x)$ e se ne tracci il grafico C'.

(d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C', dall'asse delle x e dalla retta di equazione $x = -\sqrt{3}$.

Questionario

(a) Si determini il campo di esistenza della funzione $y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{|x-4|}}$.

(b) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{x+3} + 1}$ quando x tende a 1.

(c) Si calcoli, in base alla definizione di derivata, la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ nel punto $x = -1$.

(d) In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'ellisse γ d'equazione.

(e) In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'ellisse γ d'equazione $x^2 + 9y^2 = 9$ e di asse maggiore AB. Fra i trapezi isosceli contenuti nel semipiano $y \geq 0$ inscritti in γ e di cui una base è AB, si determini quello di area massima.

(f) Si consideri la seguente proposizione: *Dato un triangolo rettangolo, il cerchio che ha per raggio l'ipotenusa è la somma dei cerchi che hanno per raggi i cateti.* Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

(g) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Se ne studi la continuità nel punto $x = 0$.

(h) Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = \sqrt{\sin x}$ e dall'asse stesso nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

(i) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \dfrac{ax^2+6}{bx+3}$ perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione $y = x + 3$.

(j) Si enunci il teorema di *Lagrange* e se ne fornisca un'interpretazione geometrica.

(k) Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione $F(x) = a\sin^3 x + b\sin x + 2x$ sia una primitiva della funzione $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$.

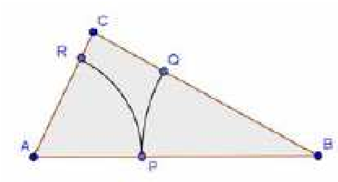
96. **(Sessione Ordinaria, 2008) - Corso di ordinamento**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $\overline{AB} = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \dfrac{\pi}{3}$.

(a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e O rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio x. Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.



(b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

(c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

(d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

Problema 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $\overline{AB} = 2$, si affrontino le seguenti questioni:

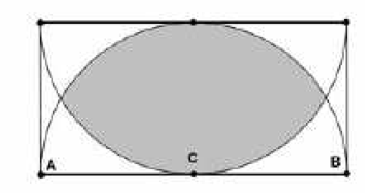
(a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.

(b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

(c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

(d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.



Questionario

(a) Si consideri la seguente proposizione: Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area. Si si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

(b) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio si provi che $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{\ } - 1}{4}$

(c) Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superfici S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

(d) Si esponga la regola del marchese de Lì'Hôpital (1661-1704) e al si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

(e) Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, P(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}.$$

(f) Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

(g) Si determini, al variare di k il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

(h) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

(i) Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste

$$\lim_{x \to 1} f(x)?$$

Si giustifichi la risposta.

(j) Secondo il codice della stra il segnale di Salita rapida (vedi figura) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è del 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1.2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Qual è la percentuale da riportare sul segnale?

97. **(Sessione Ordinaria, 2008) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1;0)$, $B(3;0)$ e C variabile sulla retta d'equazione $y = 2x$.

(a) Si provi che i punti $(1;2)$ e $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$.

(b) Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.

(c) Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.

(d) Verificato che è $\Omega = \dfrac{3}{2}(\ln 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

Problema 2

Siano f e g le funzioni definite, per ogni reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

(a) Si traccino i grafici di f e di G e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.

(b) Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.

(c) Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.

(d) Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo $[2; 4]$.

Questionario

(a) Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

(b) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(c) Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

(d) Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

(e) Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$.

(f) I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

(g) Perchè è *geometria non euclidea* ? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

(h) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

(i) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

(j) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

98. **(Sessione Ordinaria, 2008) - Scuole italiane all'estero (Americhe)**

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario.

Problema 1

Si fissi nel piano la semicirconferenza Γ che ha centro in C e diametro $\overline{AB} = 2$ e si affrontino le seguenti questioni:

(a) si determini su Γ un punto P tale che detta Q la sua proiezione ortogonale sulla tangente in B a Γ, si abbia $\overline{AP} + \overline{PQ} = k$ ove k è un parametro reale diverso da zero.

(b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

(c) Si calcoli il volume del solido ce ha per base il semicerchio delimitato da Γ e tale che tagliato con piani ortogonali ad AB dia tutte sezioni quadrate.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche:

(a) si studino e si rappresentino graficamente le funzioni f e g definite per ogni numero reale non nullo, rispettivamente, da $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$ e si dica se è vero che la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2.

(b) Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra i grafici di f e g per $1 \leq x \leq 2$ e disponendo di una calcolatrice elettronica se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

(c) Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t+\frac{1}{t}, t-\frac{1}{t}\right)$. Al variare di t $(t \neq 0)$, P descrive un luogo geometrico del quale si chide l'equazione cartesiana e il grafico.

Questionario

(a) Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150m con un percorso di 3 km. Quale è la sua inclinazione?

(b) Si provi che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.

(c) Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?

(d) Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentino due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.

(e) Si calcolino il numero delle soluzioni dell'equazione: $|x^2 - x| = k$ al variare di $k \in \Re$.

(f) Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?

(g) Dati nel piano cartesiano i punti di coordinate $P(x, |x|)$ e $Q(x, \sqrt{4-x^2})$ si determini, al variare di x, l'insieme dei punti Q la cui ordinata è minore dell'ordinata di P.

(h) La regione R delimitata dal grafico di $y = 12\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con i piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

99. **(Sessione Ordinaria, 2008) - Scuole italiane all'estero (Europa)**

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario.

Problema 1

La circonferenza γ passa per $B(0,-4)$ ed è tangente in $O(0,0)$ alla retta di coefficiente angolare -4; la parabola λ passa per $A(4,0)$ ed è tangente in O a γ.

(a) Si disegnino γ e λ e se ne determino le rispettive equazioni cartesiane.

(b) Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandolo in gradi e primi sessagesimali.

(c) Se P è un punto dell'arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la proiezione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.

(d) Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.

Problema 2

Nell'insieme delle funzioni $y = f(x)$ tali che:

$$y' = \frac{ax}{(1+4x^2)^2},$$

si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $(0,2)$.

(a) Constatato che la funzione definita da: $y = \dfrac{2}{(1+4x^2)^2}$ è quella richiesta, si disegni γ.

(b) Si conduca la tangente a γ in un suo generico punto P. Sia Q l'intersezione di tale tangente con l'asse x e H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Per quale valore di x è minima la lunghezza del segmento HQ?

(c) Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ e dagli assi cartesiani.

Questionario

(a) La regione R delimitata dal grafico di $y = \sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di S.

(b) Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

(c) Si determini, al variare di k,il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0.$$

(d) La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema 50 cm. Si dica quanti litri di vino la damigiana può contenere.

(e) Si dimostri che l'equazione $x^7 + 5x + 5 = 0$ ha una sola radice reale.

(f) Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\Re$ in $\Re$:

$$f : x \to 5^{x+1};\ g : x \to 5^x + 1;\ h : x \to 5^{|x|},\ k : x \to 5^{-x}.$$

(g) Quale significato attribuisci al simbolo $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$? Esiste un k tale che $\left(\begin{array}{c} 10 \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ k-3 \end{array} \right)$?

(h) Dimostra che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

100. **(Sessione Suppletiva, 2008) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.

(a) Si esprima in funzione di $t = \tan \frac{x}{2}$ (con $x = B\hat{O}P$) l'area del quadrilatero $OMPN$, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.

(b) Si studi la funzione $f(t)$ così ottenuto e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

(c) Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume il valore massimo.

(d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$y = \sin x(2\cos x + 1).$$

(a) Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $P(\pi, 0)$.

(b) Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

(c) Si scrivano le equazioni della retta tangente alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\pi/2$ e $3\pi/2$ e si determini il loro punto d'intersezione C.

(d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

Questionario

(a) Si determini la distanza delle due rette parallele:

$$3x + y - 3\sqrt{10}, \;\; 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0.$$

(b) Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

(c) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = -x + 1\sqrt{x^2 + 2x + 2}.$$

(d) Si calcoli il limite della funzione:

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x},$$

quando x tende a 0.

(e) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

(f) Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra la superficie appianate delle due calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

(g) La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

(h) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.

(i) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$$

nel punto P di ascissa $x = \pi/2$.

(j) Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1+t^2, 1+t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

101. **(Sessione Suppletiva, 2008) - PNI**

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 degli 10 quesiti del questionario.

Problema 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AD uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

(a) Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto:

$$\frac{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \tan P\hat{A}B$.

(b) Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

(c) Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.

(d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente la retta di equazione $x = k$, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$y = a \sin^2 x + b \sin x + c.$$

(a) Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per $A(0, 2)$, per $B\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$.

(b) si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

(c) Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta $y = 2$ e la curva stessa.

(d) Ta tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per $P(0, 6)$ e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

Questionario

(a) Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile nel punto $x = 0$.

(b) Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine $\lambda = 23°27'$ nord)?

(c) Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x) = e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

(d) Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.

(e) Si dimostri che l'equazione $(3-x)e^x - 3 = 0$ per $x > 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

(f) Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

(g) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

(h) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti $A(0,1)$, $B(0,4)$. Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di ampiezza massima.

(i) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{\ln x}} \frac{e^t}{t^2} dt,$$

nel punto P di ascissa $x = e$.

(j) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.