DISTRIBUZIONI DI BERNOULLI E DI POISSON

SIA DATO UN EVENTO CASUALE CHE PUÒ AVERE SOLO DUE POSSIBILI ESITI (AD ES. TESTA O CROCE, FIGLIO MASCHIO O FIGLIO FEMMINA ...) UNO DEI DUE RAPPRESENTA UN SUCCESSO, L'ALTRO UN INSUCCESSO. SIA p LA PROBABILITÀ DI SUCCESSO. SI RIPETE n VOLTE LA PROVA IN CONDIZIONI IDENTICHE E INDIPENDENTI TRA DI LORO. SI DICE VARIABILE CASUALE DI BERNOULLI, O BINOMIALE, QUELLA CHE CONTA IL NUMERO COMPLESSIVO K DI SUCCESSI OTTENUTO SULLE n PROVE.
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI, O BINOMIALE, È DATA DA:

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,\dots,n$$

DI SOLITO LA SI INDICA CON $B(n,p)$. INOLTRE SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p)$$

SIA AD ESEMPIO UN'URNA CONTENENTE 10 PALLINE, DI CUI 4 BIANCHE E 6 NERE. SI EFFETTUANO 5 ESTRAZIONI SUCCESSIVE DI UNA PALLINA. QUAL È LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE ESATTAMENTE 2 PALLINE NERE?
IN QUESTO CASO, $n = 5$ (NUMERO DI PROVE). GLI ESITI SONO SOLO DUE, ESTRAZIONE DI PALLINA BIANCA O NERA, E IL SUCCESSO È RAPPRESENTATO DALLA PALLINA NERA. LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UNA PALLINA NERA È $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, E IO DEVO SORTIRNE $k=2$. SI HA COSÌ:

$$p(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(1-\frac{3}{5}\right)^{5-2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{3^2}{5^2}\cdot\frac{2^3}{5^3} = \frac{144}{625}$$

CIOÈ IL 23%. SI HA POI:

$$E(X) = 5\cdot\frac{3}{5} = 3 \quad ; \quad V(X) = 5\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

UN'ALTRA IMPORTANTE DISTRIBUZIONE DISCRETA DI PROBABILITÀ È LA DISTRIBUZIONE DI POISSON, CHE SI PUÒ RICAVARE COME APPROSSIMAZIONE DI QUELLA BINOMIALE. UNA VARIABILE CASUALE È DETTA DI POISSON CON PARAMETRO $\lambda > 0$ SE LA SUA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ È DATA DA:

$$p(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,1,\dots$$

DI SOLITO LA SI INDICA CON $P(\lambda)$. ESSA APPROSSIMA TANTO MEGLIO IL COMPORTAMENTO DELLA VARIABILE CASUALE QUANTO PIÙ n È GRANDE E p È PICCOLA. DI SOLITO LA SI USA QUANDO DELLA VARIABILE CASUALE O DI POISSON SI CONOSCE IL VALORE MEDIO MA NON I VALORI ESATTI DI n E p, PERCHÉ:

$$E(X) = \lambda \quad , \quad V(X) = \lambda$$

ESSA È IMPORTANTISSIMA IN FISICA, POICHÉ IL NUMERO DI PARTICELLE α EMESSE DA UNA RADIOSORGENTE IN UN TEMPO FISSO È UNA VARIABILE CASUALE DEL TIPO DI POISSON. AD ESEMPIO, AL CENTRALINO ARRIVANO IN MEDIA 100 TELEFONATE. QUAL È LA PROBABILITÀ DI VEDERNE ARRIVARE 120? X È IL NUMERO DI TELEFONATE, TUTTE INDIPENDENTI TRA DI LORO, E NON SO LA PROBABILITÀ ESATTA CHE QUALCUNO TELEFONI. ALLORA:

$$p(X=120) = e^{-100}\cdot\frac{100^{120}}{120!} \cong 0{,}56\%$$

ESEMPIO_ SIA DATA LA VARIABILE CASUALE X AVENTE DENSITÀ DI PROBABILITÀ:

$$f(x)=\begin{cases} A x^2 & \text{se } 0\leq x\leq 4 \\ 0 & \text{se } x<0 \vee x>4 \end{cases}$$

ESSA È DEFINITA POSITIVA, MA PER RAPPRESENTARE UNA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEVE ESSERE:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A x^2\, dx = \int_0^4 A x^2\, dx = 1$$

L'INTEGRALE SI RIDUCE TRA 0 E 4 PERCHÉ FUORI LA DENSITÀ È NULLA. CIÒ VUOL DIRE $\left[A\frac{x^3}{3}\right]_0^4=1$, DA CUI $A=\frac{3}{64}$. DUNQUE $f(x)=\frac{3}{64}x^2$ IN $[0;4]$

NE CONSEGUE CHE: $\mu = E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{3}{64}x^2\,dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^3 dx = 3$

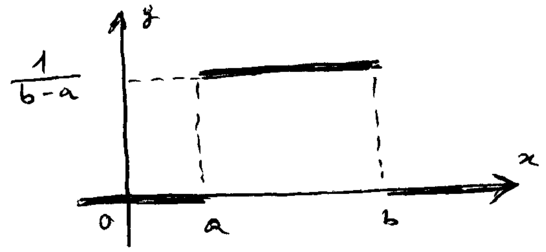
$$V(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{3}{64}x^2\,dx - \mu^2 = \frac{3}{64}\int_0^4 x^4\,dx - 9 = \frac{3}{5}$$

INVECE LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE PER $x<0$ È NULLA, PER $0<x<4$ VALE: $\int_0^x \frac{3}{64}t^2\,dt = \frac{3}{64}x^2$, MENTRE PER $x>4$ ASSUME IL VALORE FISSO $\int_0^4 \frac{3}{64}t^2\,dt = 1$. ALLORA SCRIVEREMO:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{3}{64}x^2 & \text{se } 0\leq x\leq 4 \\ 1 & \text{se } x>4 \end{cases}$$

UNA VARIABILE CASUALE CONTINUA HA UNA <u>DISTRIBUZIONE UNIFORME</u> SULL'INTERVALLO $[a;b]$ SE LA SUA DENSITÀ DI PROBABILITÀ È DATA DA:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a\leq x\leq b \\ 0 & \text{se } x<a \vee x>b \end{cases}$$



SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

$$E(x)=\frac{a+b}{2}, \quad V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

ESEMPIO_ UNA LINEA DI AUTOBUS PREVEDE LA PRIMA CORSA ALLE 7.15 E POI UNA OGNI 15 MINUTI. IO OGNI GIORNO MI RECO ALLA FERMATA IN UN ORARIO COMPRESO TRA LE 7.00 E LE 7.30, E PRENDO IL PRIMO BUS CHE PASSA. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE DEBBA ASPETTARE PIÙ DI 5 MINUTI? IN PRATICA, IL PULLMAN ARRIVA IN UN ORARIO A CASO CHE SI PUÒ ASSIMILARE ALLA SCELTA DI UN NUMERO A CASO NELL'INTERVALLO $[0;30]$, SCELTA INDICATA CON LA VARIABILE CASUALE X CON DISTRIBUZIONE UNIFORME. DEVO ATTENDERE PIÙ DI 5 MINUTI SOLO SE ARRIVO TRA LE 7.00 E LE 7.10 O TRA LE 7.15 E LE 7.25, DUNQUE LA PROBABILITÀ CERCATA È $p(E)=p(0<X<10)+p(15<X<25)=\int_0^{10}\frac{1}{30}dx + \int_{15}^{25}\frac{1}{30}dx = \frac{1}{30}(10-0)+\frac{1}{30}(25-15)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=67\%$