TEOREMA DI CAUCHY

(AUGUSTIN CAUCHY, 1789–1857)

SIANO DATE DUE FUNZIONI $f(x)$ E $g(x)$ CHE SODDISFANO QUESTE DUE IPOTESI (LE PRIME DUE DEL TEOREMA DI ROLLE)

a) SONO CONTINUE NELL'INTERVALLO CHIUSO $[a;b]$

b) SONO DERIVABILI NELL'INTERVALLO APERTO $(a;b)$

INOLTRE $g(x)$ HA DERIVATA NON NULLA IN TUTTI I PUNTI DI $[a;b]$.
ALLORA ESISTE UN PUNTO c INTERNO ALL'INTERVALLO TALE CHE:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

IL TEOREMA (DETTO ANCHE TEOREMA DEGLI ACCRESCIMENTI FINITI) NON HA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.

DIMOSTRAZIONE – SI CONSIDERI LA FUNZIONE AUSILIARIA:

$$\varphi(x) = f(x) - k\,g(x)$$

ESSENDO k UNA COSTANTE OPPORTUNA. ESSENDO $f(x)$ E $g(x)$ CONTINUE IN $[a;b]$ E DERIVABILI IN $(a;b)$, LO DEVE ESSERE ANCHE $\varphi(x)$.
ORA IMPONIAMO CHE SODDISFI ANCHE LA TERZA IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE, CIOÈ CHE:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \longrightarrow f(a) - k\,g(a) = f(b) - k\,g(b)$$

RISOLVENDO SI OTTIENE:

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ALLORA, SE k HA QUESTO VALORE, $\varphi(x)$ SODDISFA TUTTE E TRE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE, E QUINDI ESISTE ALMENO UN PUNTO TERNO ALL'INTERVALLO $[a;b]$ TALE CHE $\varphi'(c)=0$, CIOÈ:

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

DA CUI SEGUE LA TESI:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

COME IL TEOREMA DI ROLLE, ANCHE IL TEOREMA DI CAUCHY ESPRIME SOLO UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE, CIOÈ PUÒ ESSERE SODDISFATTO ANCHE SE LE IPOTESI NON LO SONO.
IN PRATICA IL TEOREMA AFFERMA CHE VI È ALMENO UN PUNTO INTERNO ALL'INTERVALLO $[a;b]$, IN CUI IL RAPPORTO TRA LE DUE DERIVATE COINCIDE CON IL RAPPORTO DEGLI INCREMENTI FINITI DELLE DUE FUNZIONI SU TUTTO L'INTERVALLO.

TEOREMA DI LAGRANGE

(GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA, 1736 – 1813)

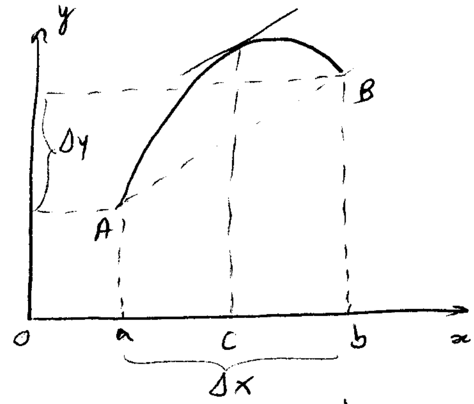
SIA DATA UNA FUNZIONE $f(x)$ CHE SODDISFA LE PRIME DUE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE:

a) È CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO $[a;b]$

b) È DERIVABILE NELL'INTERVALLO APERTO $(a;b)$

ALLORA ESISTE ALMENO UN PUNTO INTERNO ALL'INTERVALLO $[a;b]$ E TALE CHE:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



CIOÈ ESISTE UN PUNTO INTERNO AD $[a;b]$ TALE CHE LA SUA DERIVATA COINCIDE CON IL RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE, ESTESO ALL'INTERO INTERVALLO $[a;b]$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA – $f(b)-f(a)=\Delta y$ È L'INCREMENTO DELLA FUNZIONE SULL'ASSE DELLE ORDINATE, MENTRE $(b-a)$ È IL SUO INCREMENTO SULL'ASSE DELLE ASCISSE. IL RAPPORTO TRA I DUE INCREMENTI MI DÀ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA SECANTE CHE CONGIUNGE I PUNTI ESTREMI DELL'INTERVALLO $[a;b]$. SICCOME $f'(c)$ MI DÀ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA TANGENTE NEL PUNTO $x=c$, IL TEOREMA AFFERMA CHE SULL'ARCO $\overset{\frown}{AB}$ VI È UN PUNTO C LA CUI TANGENTE È PARALLELA AL SEGMENTO $\overline{AB}$.

DIMOSTRAZIONE – SI CONSIDERI LA FUNZIONE $g(x)=x$. ESSA È SICURAMENTE CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a;b]$, DERIVABILE IN $(a;b)$ E LA SUA DERIVATA, PARI AD 1, È CERTAMENTE DIVERSA DA ZERO. ALLORA POSSO APPLICARE AD ESSA E AD $f(x)$ IL TEOREMA DI CAUCHY. NE SEGUE CHE ESISTE UN PUNTO C DI $[a;b]$ TALE CHE:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$$

IL CHE COINCIDE EVIDENTEMENTE CON LA TESI DI LAGRANGE.

SE NE DEDUCE CHE IL TEOREMA DI LAGRANGE È UN CASO PARTICOLARE DEL TEOREMA DI CAUCHY, MA È ANCHE UNA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI ROLLE. INFATTI ESSO HA UN'IPOTESI IN MENO. SE AL TEOREMA DI LAGRANGE AGGIUNGESSI L'IPOTESI $f(a)=f(b)$, $\overline{AB}$ SAREBBE ORIZZONTALE E LA TANGENTE IN $x=c$ SAREBBE ANCH'ESSA ORIZZONTALE, CIOÈ $f'(c)=0$.

IL TEOREMA DI ROLLE CONSIDERA UNA FUNZIONE E TRE IPOTESI.
IL TEOREMA DI CAUCHY CONSIDERA DUE FUNZIONI E DUE IPOTESI.
IL TEOREMA DI LAGRANGE CONSIDERA UNA FUNZIONE E DUE IPOTESI.

COROLLARIO – SE DUE FUNZIONI $f(x)$ E $g(x)$ CONTINUE HANNO DERIVATE UGUALI IN TUTTI I PUNTI DELL'INTERVALLO, DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE.

POSTO INFATTI $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, SI HA $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ QUINDI, IN OGNI INTERVALLO SI HA $\varphi(b)-\varphi(a)=0$, E QUINDI $\varphi(x)$ ASSUME IN TUTTI I PUNTI DI $[a;b]$ LO STESSO VALORE, CHE È COSTANTE. $f(x)$ E $g(x)$ DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE.