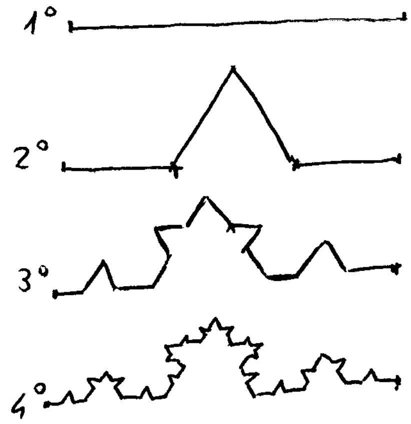
LA CURVA DI KOCH

LA CURVA DI KOCH È STATA LA PRIMA CURVA FRATTALE AD ESSERE STATA DESCRITTA NEL 1904 AD OPERA DEL MATEMATICO HELGE VON KOCH (1870 – 1924). ESSA VIENE COSTRUITA ATTRAVERSO UN PROCEDIMENTO RICORSIVO, PER ITERAZIONI SUCCESSIVE.



1ª ITERAZIONE: SI CONSIDERA UN SEGMENTO LUNGO l.

2ª ITERAZIONE: SI DIVIDE IL SEGMENTO IN TRE PARTI CONGRUENTI E SI COSTRUISCE SU QUELLO CENTRALE UN TRIANGOLO EQUILATERO, CANCELLANDO IL LATO POSTO SUL SEGMENTO. DATO CHE CIASCUNA DELLE TRE PARTI MISURA $l/3$, LA LUNGHEZZA DELLA SPEZZATA È $\frac{4}{3}l$.

3ª ITERAZIONE: SI RIPETE IL PROCEDIMENTO PER CIASCUNO DEI TRE LATI DELLA SPEZZATA, COSTRUENDO COSÌ ALTRI 4 TRIANGOLI EQUILATERI. CIASCUNO DEI LORO LATI MISURA $l/9$, E I SEGMENTI DELLA SPEZZATA SONO ORA $4 \times 4 = 16$, PER CUI LA SPEZZATA MISURA $\frac{16}{9}l$.

4ª ITERAZIONE: SI RIPETE IL PROCEDIMENTO E COSÌ I TRIANGOLI DIVENTANO 16. I LORO LATI MISURANO $\frac{l}{27}$, E SICCOME I LATI DELLA SPEZZATA SONO 64, LA SUA LUNGHEZZA TOTALE È DIVENTATA $\frac{64}{27}l$. E COSÌ VIA.

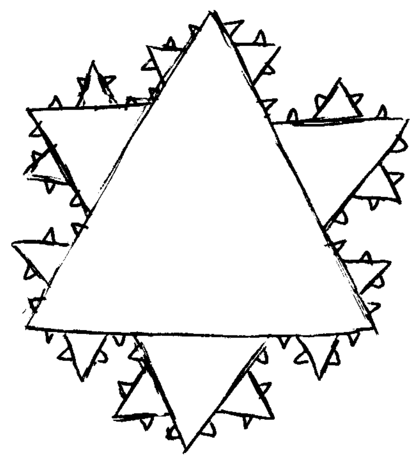
AD OGNI ITERAZIONE IL NUMERO DEI TRIANGOLI QUADRUPLICA, ED IL LORO LATO SI RIDUCE AD UN TERZO. SE NE DEDUCE CHE I VALORI DELLA LUNGHEZZA DELLA SPEZZATA COSTITUISCONO UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA DI RAGIONE $q = \frac{4}{3}$:

$$\left\{ l;\ \frac{4}{3}l;\ \frac{16}{9}l;\ \frac{64}{27}l;\ \dots \right\}$$

DATO CHE $q > 1$, SE NE DEDUCE CHE LA CURVA DI KOCH TENDE AD AVERE UNA LUNGHEZZA INFINITA!

LA CURVA DI KOCH INOLTRE È AUTOSIMILE, CIOÈ OGNI SUA SINGOLA PARTE DERIVA DA UNA TRASFORMAZIONE OMOTETICA DELLA CURVA INTERA.
ESSA NON È DERIVABILE IN NESSUN PUNTO. INFATTI UNA CURVA DERIVABILE IN UN PUNTO, SU SCALE SEMPRE PIÙ PICCOLE TENDE AD AVVICINARSI SEMPRE PIÙ AD UNA RETTA (LA TANGENTE), ED INVECE LA CURVA È AUTOSIMILE, CIOÈ VISTA SU OGNI SCALA È SEMPRE IDENTICA A SÉ STESSA.

UN CASO PARTICOLARE DI CURVA DI KOCH È IL "FIOCCO DI NEVE DI KOCH", CHE VIENE COSTRUITO CON UN SISTEMA FRATTALE MOLTO SIMILE A QUELLO DELLA CURVA DI KOCH, PER ITERAZIONI SUCCESSIVE.



1ª ITERAZIONE: SI PARTE DA UN TRIANGOLO EQUILATERO DI LATO l. LA SUA AREA È $l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2ª ITERAZIONE: SI DIVIDE CIASCUNO DEI TRE LATI DEL TRIANGOLO IN TRE PARTI CONGRUENTI. SOPRA LA PORZIONE CENTRALE SI COSTRUISCE UN ALTRO TRIANGOLO EQUILATERO, IL CUI LATO È UN TERZO DI QUELLO DEL TRIANGOLO DI PARTENZA.

(→)

(→)

L'AREA DEL TRIANGOLO EQUILATERO PIÙ PICCOLO È $\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, E SICCOME SI TRATTA DI TRE TRIANGOLI CONGRUENTI L'AREA COMPLESSIVA DEL FIOCCO DI NEVE ALLA SECONDA ITERAZIONE È $\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{\ell^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\ell^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}$

3ª ITERAZIONE: SU OGNI LATO DEL FIOCCO DI NEVE COSÌ COSTRUITO SI COSTRUISCE UN NUOVO TRIANGOLO EQUILATERO, IL CUI LATO MISURA $\frac{\ell}{9}$. SI DEVONO AGGIUNGERE 12 TRIANGOLI PIÙ PICCOLI, PER CUI ALLA TERZA ITERAZIONE L'AREA COMPLESSIVA È $\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+3\frac{\ell^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}+12\frac{\ell^2}{81}\frac{\sqrt{3}}{4}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\ell^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{4\ell^2}{27}\frac{\sqrt{3}}{4}$

4ª ITERAZIONE: SI RIPETE IL PROCEDIMENTO. STAVOLTA BISOGNA AGGIUNGERE 48 TRIANGOLI PIÙ PICCOLI, IL CUI LATO DIVENTA $\frac{\ell}{27}$. SI HA ALLORA:

$$\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+3\frac{\ell^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}+12\frac{\ell^2}{81}\frac{\sqrt{3}}{4}+48\left(\frac{\ell}{27}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\ell^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{4}{27}\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{16}{243}\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'AREA COMPLESSIVA DEL "FIOCCO DI NEVE DI KOCH" È DATA DALLA SOMMA DI QUESTA SERIE. PER CUI ESSA È PARI A:

$$\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}+\cdots\right]=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1+\frac{1}{3}\left[1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+\cdots\right]\right\}$$

QUELLA CHIUSA TRA PARENTESI È UNA SERIE GEOMETRICA DI PERIODO $q=\frac{4}{9}$.

ESSENDO IL PERIODO <1, LA SERIE È CONVERGENTE, E CONVERGE A:

$$\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right]\right\}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1+\frac{3}{5}\right\}=\frac{2}{5}\ell^2\sqrt{3}$$

SE NE CONCLUDE CHE IL FIOCCO DI NEVE HA UN <u>PERIMETRO INFINITO</u> (COME LA CURVA DI KOCH) MA UN'<u>AREA FINITA</u>.

IL FIOCCO DI NEVE DI KOCH È UN ESEMPIO DI <u>FRATTALE</u>. IL TERMINE VENNE CONIATO DAL MATEMATICO FRANCESE DI ORIGINE POLACCA B. MANDELBROT (1924–), CHE STUDIÒ I NUMERI COMPLESSI PER MEZZO DELLA GRAFICA COMPUTERIZZATA NEL 1975. TUTTI I FRATTALI SONO CARATTERIZZATI DALLA PROPRIETÀ DI AUTOSIMILARITÀ TIPICA DELLA CURVA DI KOCH. LA NATURA È RICCA DI ESEMPI DI AUTOSIMILARITÀ: FORME VEGETALI, LE SPUGNE, LE NUVOLE, IL PERCORSO DELLE SCARICHE DEI FULMINI, LA RETE DEI VASI SANGUIGNI IN CUI OGNI BIFORCAZIONE È SEGUITA DA ALTRE SIMILI E PIÙ PICCOLE. LA DIMENSIONE DEL FRATTALE È FRAZIONARIA, E CIÒ FA SÌ CHE, NELLA REGIONE DI PIANO O DI SPAZIO IN CUI SI SVILUPPA, OGNI PUNTO SIA VICINISSIMO AD UN ELEMENTO DEL FRATTALE, ANCHE SE QUESTO NE OCCUPA UNA MINIMA PARTE: I POLMONI, AD ESEMPIO, DEVONO LA LORO EFFICIENZA ALLA STRUTTURA FRATTALE DEGLI ALVEOLI, CHE PERMETTE, NEL VOLUME DELL'ORGANO, UNA ESTESA SUPERFICIE DI SCAMBIO TRA SANGUE ED OSSIGENO. LA GEOMETRIA FRATTALE HA OGGI INFINITE APPLICAZIONI, LEGATE IN GRAN PARTE ALLA MATEMATICA DEL CAOS.