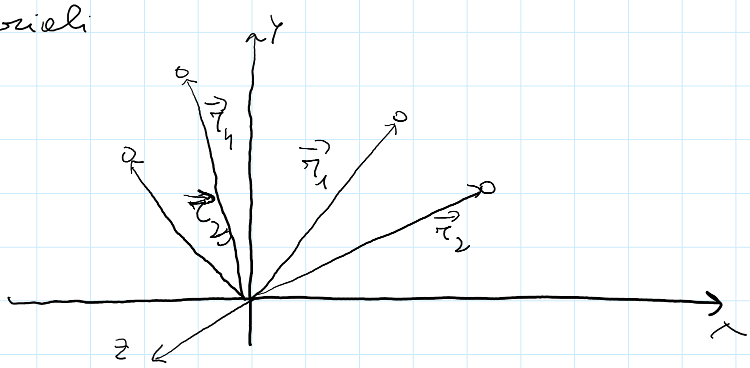
Meccanica del sistema di punti

venerdì 11 febbraio 2022 15:53

Consideriamo un sistema formato da N punti materiali



Siano $\vec{r}_i$ i vettori posizione che identificano la posizione dell'i-esima particella del sistema. Per descrivere un sistema di questo tipo bisognerebbe risolvere per ognuno di questi punti un'equazione del tipo $\vec{F} = m\vec{a}$, il che è molto complicato da svolgere quando il numero N di particelle che compongono il sistema diventa elevato. Si può, quindi, pensare di fare una descrizione statistica del moto dell'intero sistema di particelle introducendo un concetto noto come CENTRO DI MASSA. Fisicamente, il centro di massa è descrivibile come un punto in cui è concentrata tutta la massa del sistema. Al posto delle altre particelle, possiamo identificarne la posizione tramite un vettore posizione $\vec{r}_{cm}$. In formule tale vettore si ottiene come media pesata, tramite le masse, dei vettori posizione di tutte le particelle:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M_{TOT}}$$

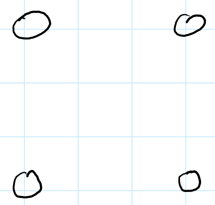
dove $M_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} m_i$ è la massa totale del sistema.

Tale vettore nel riferimento cartesiano in 3D ha 3 componenti ossia, x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M_{TOT}} \; ; \; y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M_{TOT}} \; ; \; z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M_{TOT}}$$

Esempio di calcolo del centro di massa:

Consideriamo 4 punti materiali di ugual massa, posti alle estremità di un quadrato di lato $\ell = 1$ cm.



Fissiamo, per prima cosa, un opportuno sistema di riferimento per calcolare la posizione del centro di massa del sistema usando le precedenti formule.

posizione dei vari corpi:

1) $(0, 0)$
2) $(0, \ell)$
3) (ℓ, ℓ)
4) $(\ell, 0)$

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{M_{TOT}} = \frac{m x_1 + m x_2 + m x_3 + m x_4}{4m} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{0 + 0 + \ell + \ell}{4} = \frac{\ell}{2}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i y_i}{M_{TOT}} = \frac{m y_1 + m y_2 + m y_3 + m y_4}{4m} =$$

$$= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} = \frac{0 + \ell + \ell + 0}{4} = \frac{\ell}{2}$$

Si può notare una particolarità, ossia in tal caso il centro di massa coincide con il centro di simmetria del sistema. In generale, se valgono le seguenti condizioni:

1) Tutte le particelle del sistema hanno la stessa massa
2) Il sistema presenta delle simmetrie

Allora:

La posizione del centro di massa coincide con il centro di simmetria del sistema

Tale generalità vale sia per un sistema discreto di punti che per uno continuo come il corpo rigido.
Torniamo ora al problema centrale, ossia, l'analisi del moto complessivo del sistema. Dalla discussione precedente è emerso che tutte le masse del sistema può essere vista come condensata nel centro di massa, quindi, è ragionevole descrivere il moto del sistema osservando il moto del centro di massa. Tale descrizione, però, bisogna ricordare che è di tipo statistico, ossia, se ad esempio il centro di massa si muove verso destra, non è detto che tutte le particelle si muovano in tale direzione, più precisamente significa che le particelle del sistema in media vanno verso destra ma vi è una probabilità non nulla che altre particelle si muovano in direzioni diverse. Detto ciò, è possibile dimostrare che velocità del centro di massa ed accelerazione dello stesso, sono ottenibili in maniera molto simile a come si ottiene la sua posizione, ossia:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M_{TOT}} \quad ; \quad \vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M_{TOT}}$$

Moltiplichiamo per M_{TOT} entrambe le formule:

$$M_{TOT}\,\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$M_{TOT}\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

Ma $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{P}_{TOT}$ e $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \vec{R}$, quindi:

$$\vec{R}_{TOT} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{P}_{TOT} = M_{TOT}\,\vec{v}_{CM}$$

Tali formule danno rispettivamente la risultante delle forze agenti sul sistema e la quantità di moto totale del sistema. Da ciò possiamo vedere come sia coerente con tale modello statistico studiare il moto del sistema a partire da quello del suo centro di massa. Per $\vec{R}_{TOT}$, però, notiamo che essa in generale la somma di tutte le forze, sia quelle esterne al sistema che quelle interne (ad es. le forze d'interazione tra le particelle) ma le forze interne, per il terzo principio della Dinamica, sono uguali e contrarie a coppie, quindi, la risultante delle forze interne sarà nulla. Da ciò ne segue che $\vec{R}_{TOT}$ sarà data solo dalla somma delle forze esterne, quindi:

$$\vec{R}_{TOT}^{(ext)} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM}$$

Come per $\vec{P}_{TOT}$ e $\vec{R}_{TOT}$, anche K_{TOT} e L_{TOT} si calcolano come:

$$K_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} K_i \quad ; \quad \vec{L}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

In analogia con quanto detto per la traslazione attraverso $\vec{R}^{(ext)} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM}$, per la rotazione possiamo dire che:

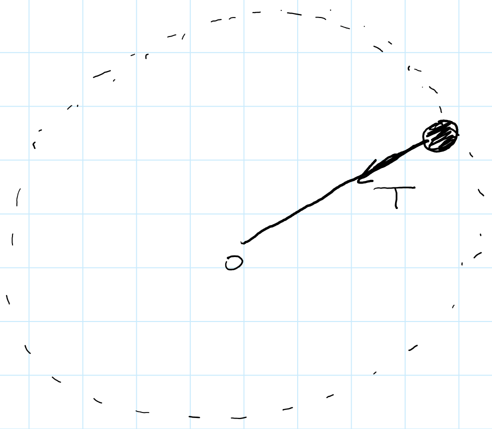
$$\vec{M}^{(ext)}_{TOT} = \frac{\Delta \vec{L}_{TOT}}{\Delta t}$$

Che congiuntamente con:

$$\vec{R}^{(ext)}_{TOT} = \frac{\Delta \vec{P}_{TOT}}{\Delta t} \qquad \left(\text{Infatti: } \frac{\Delta \vec{P}_{TOT}}{\Delta t} = M_{TOT}\frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM}\right)$$

Costituiscono le due equazioni cardine della Dinamica. Se, infatti, $\vec{R}^{(ext)}_{TOT} = 0$, ossia se la risultante delle forze esterne applicate al sistema è nulla allora $\Delta \vec{P}_{TOT} = 0$ e, quindi, $\vec{P}_{TOT}$ si conserva. Detto in termini più specifici $\vec{P}_{TOT}$ è una costante del moto. Sistemi in cui $R^{(ext)}_{TOT} = 0$ si dicono ISOLATI. Analogamente se, invece, $\vec{M}^{(ext)}_{TOT} = 0$ allora $\Delta \vec{L}_{TOT} = 0$, quindi, il momento angolare si conserva. Sistemi in cui ciò accade sono ad esempio quelli di forze centrali. Un esempio è il seguente:

Si consideri un corpo di massa m vincolato ad una fune ed in moto lungo una circonferenza con centro il punto di ancoraggio della fune:



$\vec{T}$ è diretta verso il centro di rotazione O, quindi, il braccio di $\vec{T}$ rispetto a tale polo è nullo ne segue che anche $\vec{M}$ associato a $\vec{T}$ è nullo. Essendo $\vec{T}$

l'unica forza agente nella direzione radiale (verso il centro)
ne consegue che $\Delta \vec{L}_{tot} = 0$ per il corpo di massa m.