TEOREMA DI ROLLE

(MICHEL ROLLE, 1652 – 1719)

SIA $y = f(x)$ UNA FUNZIONE CHE SODDISFA LE SEGUENTI IPOTESI:

a) È CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO $[a; b]$

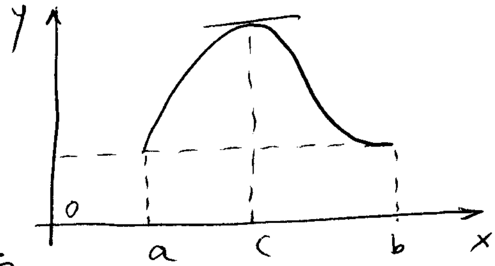
b) È DERIVABILE ALMENO NELL'INTERVALLO APERTO $(a; b)$

c) ASSUME LO STESSO VALORE AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO: $f(a) = f(b)$

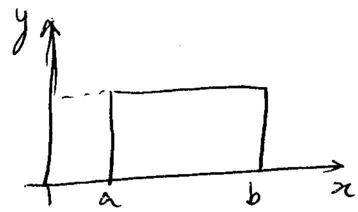
ALLORA ESISTE ALMENO UN PUNTO C INTERNO ALL'INTERVALLO IN CUI LA FUNZIONE HA DERIVATA NULLA.

IN SIMBOLI:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \in C^0[a; b] \\ f(x) \in C^1(a; b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a; b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

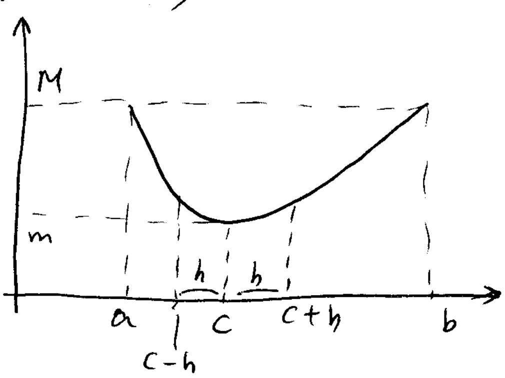


SIGNIFICATO GEOMETRICO: LA FUNZIONE È CONTINUA E DERIVABILE SU $[a; b]$ (AL MASSIMO NON È DERIVABILE AGLI ESTREMI, AD ES. LÌ HA TANGENTE VERTICALE) E I SUOI ESTREMI SI TROVANO ALLA STESSA QUOTA. ALLORA C'È ALMENO UN PUNTO INTERNO ALL'INTERVALLO LA CUI TANGENTE È ORIZZONTALE (LA DERIVATA DÀ IL COEFF. ANGOLARE DELLA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN OGNI PUNTO, E COEFF. ANGOLARE NULLO VUOL DIRE RETTA ORIZZONTALE)



DIMOSTRAZIONE. 1° CASO. $f(x)$ è COSTANTE. ALLORA RISPETTA TUTTE LE CONDIZIONI DI ROLLE, E SICCOME LA SUA DERIVATA È NULLA IN OGNI PUNTO, IL TEOREMA È OVVIAMENTE VERIFICATO.

2° CASO. $f(x)$ NON È COSTANTE. ESSENDO CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO $[a; b]$, PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS SU di ESSO È DOTATA DI MASSIMO E DI MINIMO. SUPPONIAMO, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ, CHE IL MASSIMO, COME IN FIGURA, COINCIDA CON $f(a) = f(b)$. DIAMO ALLORA AL MINIMO C, CHE CADE INTERNAMENTE AD $[a; b]$, UN INCREMENTO POSITIVO h IN MODO CHE IL VALORE $c + h \in [a; b]$. ESSENDO C IL MINIMO, SI AVRÀ:



$$f(c+h) \geq f(c)$$

CIOÈ:

$$f(c+h) - f(c) \geq 0$$

SE $h > 0$ SI HA:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

MENTRE SE $h < 0$:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

(⟶)

(→)

Per il teorema della permanenza del segno, allora:

se $h>0$: $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ se $h<0$: $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

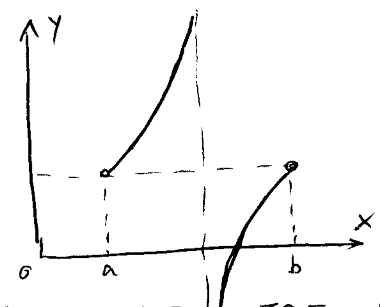
Ma poiché per ipotesi la funzione è derivabile in tutti i punti di $(a;b)$, i due rapporti incrementali per $h\to 0$ devono tendere allo stesso limite, ed esso dovrà essere per forza uguale a zero:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$$

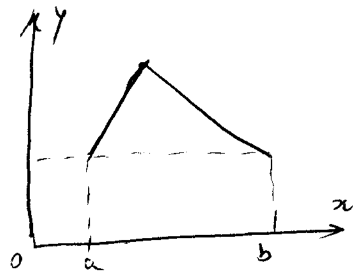
cioè $f'(c)=0$, come volevasi dimostrare. Analoga dimostrazione si conduce se ad essere interno è il punto di massimo.

E ora, facciamo esempi e controesempi. Il teorema non è verificato se:

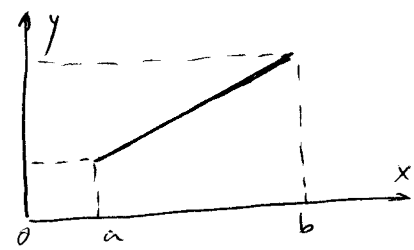
Tolgo la prima ipotesi (funzione non continua)



Tolgo la seconda ip. (funzione non derivabile)

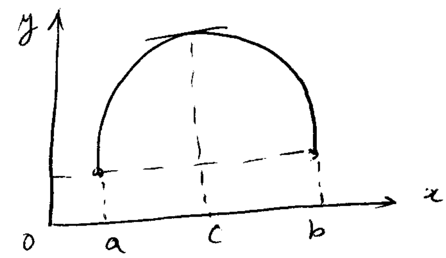


Tolgo la terza ip. ($f(a) \neq f(b)$)

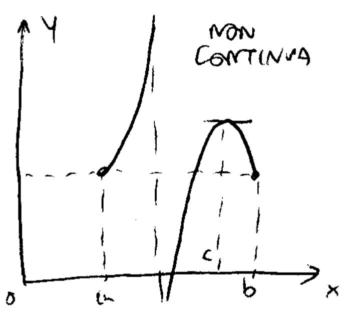


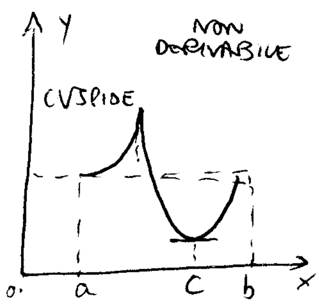
In nessuno dei tre casi il teorema è verificato (manca il punto a tangente orizzontale)

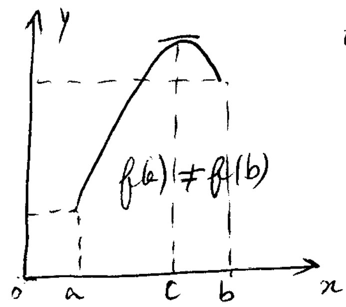
Se la funzione non è derivabile agli estremi dell'intervallo, come la semicirconferenza a destra, ma sì in tutti gli altri, il teorema è manifestamente verificato.



Negli estremi del diametro la semicirconferenza ha punti a tg. verticale, quindi ivi non è derivabile







Come mostrano i tre esempi soprastanti, il teorema di Rolle può essere verificato anche se le tre ipotesi non sono soddisfatte tutte o in parte. Questo significa che il teorema di Rolle, come anche i teoremi di Cauchy e Lagrange, esprime solo una condizione sufficiente: se le tre ipotesi sono verificate (tutte e tre contemporaneamente), ciò è sufficiente per affermare che esiste il punto c, ma esse non sono necessarie; in altre parole, il punto a tangente orizzontale può esistere, come si vede dai tre controesempi qui sopra, anche se le tre ipotesi non sono soddisfatte.