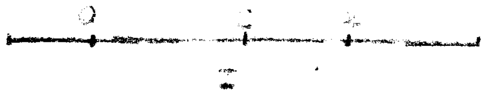
FORMULA DI TAYLOR e DI MAC LAURIN

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo I e siano a un punto fisso e x un punto variabile in I con $x>a$. Se la $f(x)$ è derivabile nell'intervallo aperto (a,x), allora, per il tr. di Lagrange, esiste almeno un punto c, interno all'intervallo (a,x), tale che:



$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

$$f(x)-f(a)=(x-a)\cdot f'(c)$$

$$f(x)=f(a)+(x-a)\cdot f'(c)$$

Si può dare una generalizzazione di questo risultato. Se si suppone, infatti, che la $f(x)$ ammetta, nell'intervallo I, derivate continue fino all'ordine n e derivata di ordine $(n+1)$ per ogni valore ad (a,x), si può affermare che esiste il seguente:

TEOREMA. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo I, ivi derivabile n volte, con derivate continue; sia a un punto fisso e x un qualsiasi altro punto di I; inoltre esista la $f^{(n+1)}$ in ogni interno all'intervallo (a,x). In tali ipotesi, esiste almeno un punto c, interno a tale intervallo, tale che:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

È questa la formula o sviluppo di Taylor di punto iniziale a.

Il termine $R_n=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(c)$ si chiama termine complementare o RESTO della formula di Taylor

La parte della formula di Taylor che precede il resto, cioè

$$f(a)+(x-a)\cdot f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

è un polinomio di grado n nella variabile x e viene detto POLINOMIO DI TAYLOR

Posto $x-a=h$ con $x=a+h$ e $c=a+\theta h$ con $0<\theta<1$, si può scrivere:

$$f(a+h)=f(a)+h\cdot f'(a)+\frac{h^2}{2!}\cdot f''(a)+\dots+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Se l'origine O appartiene all'intervallo I e se si prende $a=0$, la formula di Taylor diventa

$f(x)=f(0)+f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\dots+R_n(x)$ che prende il nome di FORMULA DI MAC LAURIN

con $R_n=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$