AFFINITÀ E SIMILITUDINI

SI CHIAMA AFFINITÀ OGNI TRASFORMAZIONE GEOMETRICA DEL PIANO CHE TRASFORMA RETTE IN RETTE, CIOÈ CHE MANTIENE L'ALLINEAMENTO DEI PUNTI. L'EQUAZIONE GENERICA DELL'AFFINITÀ È:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

CON $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, CIOÈ $ab' - a'b \neq 0$. INFATTI UNA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA HA SENSO SE OGNI PUNTO $P'(x', y')$ PROVIENE DA UN UNICO PUNTO $P(x, y)$, COSA CHE SI VERIFICA SOLO SE IL SISTEMA SOPRA SCRITTO HA DISCRIMINANTE DIVERSO DA ZERO.

SE $ab' - a'b > 0$, L'AFFINITÀ SI DICE <u>DIRETTA</u>, CIOÈ NON INVERTE IL VERSO DI ROTAZIONE DEI VERTICI DI UN POLIGONO. SE $ab' - a'b < 0$, SI DICE <u>INVERTENTE</u>, E IL VERSO DEI VERTICI SI INVERTE.

L'AFFINITÀ TRASFORMA RETTE PARALLELE IN RETTE PARALLELE, RETTE INCIDENTI IN RETTE INCIDENTI; UNA CONICA IN UN'ALTRA CONICA DELLO STESSO TIPO (AD ES. ELLISSE IN ELLISSE). INOLTRE TRASFORMA UNA FIGURA DI AREA $\mathcal{A}$ IN UNA FIGURA DI AREA $\mathcal{A}'$ TALE CHE $\dfrac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = |ab' - a'b|$, CHE SI DICE <u>RAPPORTO DI AFFINITÀ</u>. SE $|ab' - a'b|$, LE AREE SONO CONSERVATE E L'AFFINITÀ PRENDE IL NOME DI <u>EQUIVALENZA</u>. I RAPPORTI TRA LUNGHEZZE INVECE NON SONO CONSERVATI (SOLO QUELLI TRA SEGMENTI FRA LORO PARALLELI).

DATE DUE TERNE DI PUNTI NON ALLINEATI A, B, C E A', B', C', ESISTE UNA SOLA AFFINITÀ CHE TRASFORMA I PRIMI NEI SECONDI. INOLTRE OGNI AFFINITÀ PUÒ ESSERE DOTATA DI PUNTI UNITI, CHE SI DETERMINANO PONENDO $x = x'$ E $y = y'$ NELLA SUA EQUAZIONE.

<u>ESEMPIO</u> – SIA L'AFFINITÀ $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ SI HA $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -5 \neq 0$

L'AFFINITÀ È INVERTENTE, ED ESSA QUINTUPLICA LE AREE. QUALI I SUOI PUNTI UNITI? BASTA PORRE $\begin{cases} x = -x + 2y \\ y = 2x - y \end{cases}$ DA CUI $2x = 2y$, CIOÈ $y = x$

TUTTI I PUNTI DELLA RETTA $y = x$ SONO UNITI: È UNA RETTA DI PUNTI UNITI. È L'UNICA RETTA UNITA? CONSIDERO $y' = mx' + q$ E VI SOSTITUISCO LE EQUAZIONI DELL'AFFINITÀ:

$$2x - y = m(-x + 2y) + q$$
$$2x - y = -mx + 2my + q$$
$$-y(1 + 2m) = -x(m + 2) + q$$
$$y = x\left(\frac{m+2}{2m+1}\right) - \frac{q}{2m+1}$$

(→)

(→)

QUESTA COINCIDE CON $y = mx + q$ SE $\frac{m+2}{2m+1} = m$, $-\frac{q}{2m+1} = q$

DALLA SECONDA RICAVO $2m+1 = -1$, CIOÈ $m = -1$ PER QUALSIASI VALORE DI q. DALLA PRIMA RICAVO $m^2 = 1$ E $m = \pm 1$. SOSTITUENDO $m = +1$ NELLA SECONDA SI RICAVA $q = 0$. DUNQUE LE RETTE UNITE SONO $y = x$ (GIÀ TROVATA) E LE INFINITE RETTE $y = -x + q$ (CHE SONO RETTE UNITE MA NON RETTE DI PUNTI UNITI).

CASO PARTICOLARE: SE $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$ E $ab + a'b' = 0$, L'AFFINITÀ CONSERVA TUTTI I RAPPORTI TRA SEGMENTI, NON SOLO QUELLI TRA SEGMENTI PARALLELI, ED ANCHE GLI ANGOLI. DI CONSEGUENZA LE CIRCONFERENZE SONO TRASFORMATE IN CIRCONFERENZE, LE RETTE PERPENDICOLARI IN RETTE PERPENDICOLARI, I QUADRATI IN QUADRATI. INSOMMA, TALI AFFINITÀ CONSERVANO LA FORMA DELLE FIGURE, CHE VENGONO "CAMBIATE DI SCALA"; PER QUESTO SI PARLA DI SIMILITUDINI. $K = \sqrt{a^2 + a'^2} = \sqrt{b^2 + b'^2}$ SI DICE RAPPORTO DI SIMILITUDINE, ED È IL RAPPORTO TRA SEGMENTI (K^2 È INVECE IL RAPPORTO TRA LE AREE E K^3 TRA I VOLUMI).

RISOLVENDO IL SISTEMA $\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$ SI TROVANO DUE SOLUZIONI POSSIBILI:

$a' = -b$ E $b' = +a$, OPPURE $a' = b$ E $b' = -a$. NEL PRIMO CASO SI HANNO LE EQUAZIONI $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = -bx + ay + c' \end{cases}$ (SIMILITUDINE DIRETTA) E $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}$ (SIMILITUDINE INVERTENTE)

ESEMPIO: $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2 \\ y' = 3x - 4y - 2 \end{cases}$ È UNA SIMILITUDINE DIRETTA AVENTE RAPPORTO $K = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

DATE DUE COPPIE DI PUNTI DISTINTI A, B E A', B', ESISTONO SOLO DUE SIMILITUDINI, UNA DIRETTA E UNA INVERTENTE, CHE TRASFORMANO L'UNA NELL'ALTRA. OGNI SIMILITUDINE (CHE NON SIA UN'ISOMETRIA) HA SEMPRE UNO ED UN SOLO PUNTO UNITO.

SE IL RAPPORTO DI SIMILITUDINE È PARI A 1, LA SIMILITUDINE SI CHIAMA ISOMETRIA (CONSERVA TUTTE LE MISURE). PER QUESTO DEVE ESSERE $a^2 + b^2 = 1$.

SE IL DETERMINANTE DELL'ISOMETRIA È $+1$, ESSA È DIRETTA E PUÒ ESSERE SOLO UNA TRASLAZIONE O UNA ROTAZIONE. SE IL DETERMINANTE È -1, ESSA È INVERTENTE E PUÒ ESSERE SOLO UNA SIMMETRIA ASSIALE OPPURE UNA GLISSO-SIMMETRIA, CIOÈ LA COMPOSIZIONE DI UNA TRASLAZIONE E DI UNA SIMMETRIA ASSIALE.

IN PARTICOLARE, LE EQUAZIONI DI UNA ROTAZIONE DI UN ANGOLO α SONO:

$\begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha + c \\ y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha + c' \end{cases}$ E SI HA $K = \sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$

DUNQUE È PROPRIO UN'ISOMETRIA.