GAETANO BARBELLA

L'ANGOLO AUREO

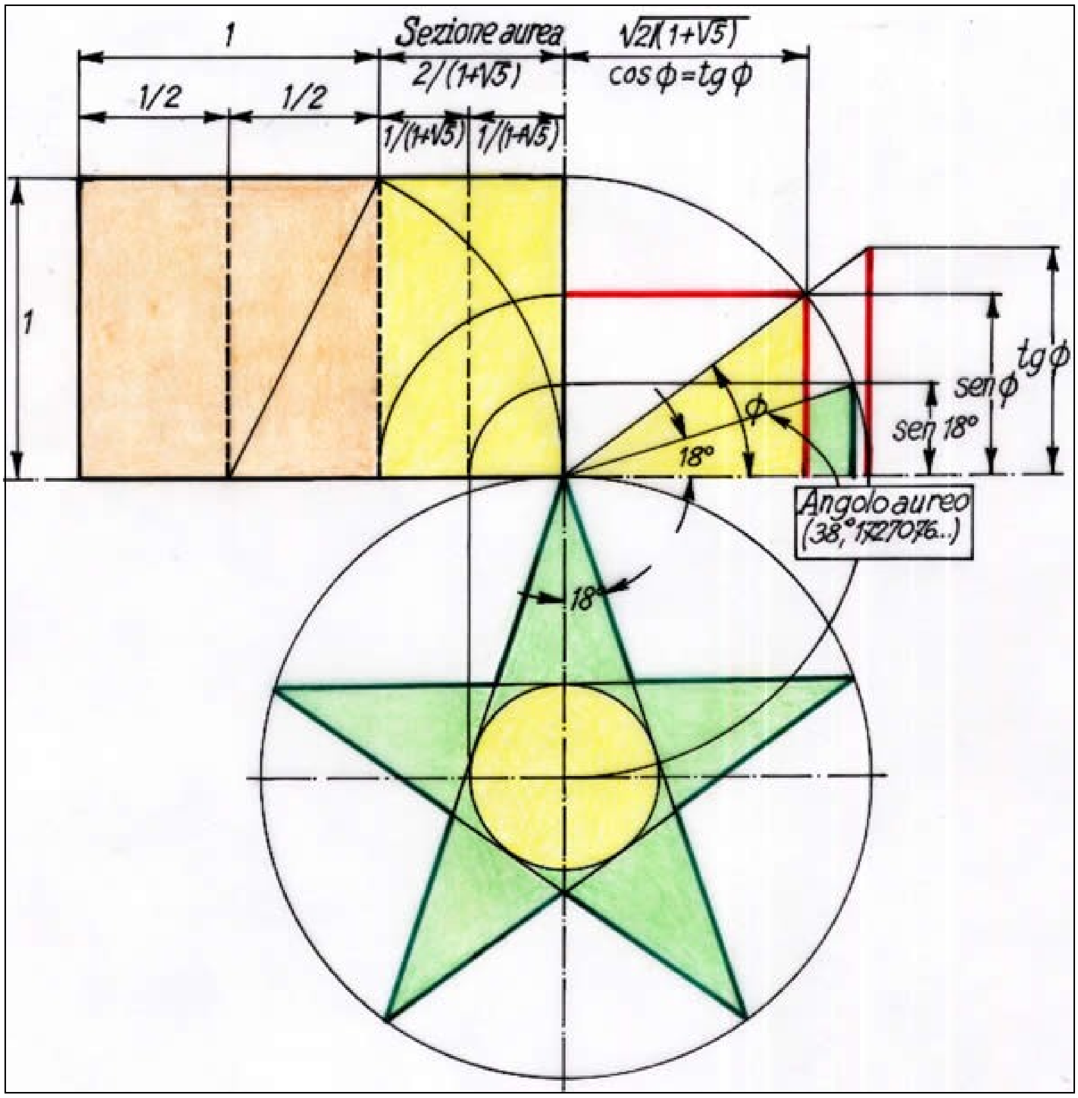

Illustrazione 1

RELAZIONE FRA LE GEOMETRIE DELLA SEZIONE AUREA, ANGOLO AUREO E PENTAGRAMMA

INTRODUZIONE

Dell'angolo aureo, tema di questo breve compendio, se ne fa cenno nel libro di Italo Ghersi, «La matematica dilettevole e curiosa» edizione Hoepli, nel capitolo dedicato alla «quadratura del circolo», ma senza tanti approfondimenti, nel senso che non gli si attribuisce nulla di aureo da accostarlo alla nota «sezione aurea». Si tratta di un preciso angolo le cui funzioni trigonometriche del coseno e tangente danno luogo allo stesso valore che si approssima a quello del «quarto della circonferenza», uno dei diversi itinerari matematici empirici per arrivare allo scopo della ricercata «quadratura del circolo».
Ho definito aureo l'angolo in questione perché farò vedere che deriva dalla nota «sezione aurea» o «media ragione» che gli artisti del Rinascimento tenevano in gran conto per allestire in anteprima il soppalco strutturale delle loro opere.
In matematica, la «sezione aurea» o «media ragione» di un segmento AB, è quella parte AX che è media proporzionale tra l'intero segmento e la rimanente parte XB. In particolare si può definire questa concezione con la seguente espressione di calcolo:

$$AX:XB=(1+\sqrt{5}):2=1{,}618033989...$$

Se, poi, a 1,618033989... sottraiamo **1**, otteniamo il relativo inverso, 0,618033988.
Detto questo, l'angolo aureo ora comincia a delinearsi se consideriamo il suddetto inverso della sezione aurea quale valore del seno relativo:

$$\arcsin 0{,}618033988 = 38{,}17270763...^\circ.$$

A questo punto siamo in grado di costatare che le corrispondenti funzioni trigonometriche del coseno e tangente risultano effettivamente uguali fra loro.
Infatti:

$$\cos 38{,}17270763...^\circ = 0{,}786151377...$$
$$\text{tang } 38{,}17270763...^\circ = 0{,}786151377...$$

Di tutto ciò si può far capo, con l'uso di «righello e compasso», alla tav.01 di copertina per capire graficamente la geometria grazie alla quale si perviene alla configurazione, prima d'altro del segmento della «sezione aurea» e poi ai segmenti del coseno e tangente dell'«angolo aureo», che vi derivano. Questa geometria porta anche alla relazione col pentagramma che sarà argomento di trattazione verso la conclusione.
Sembrerebbe concluso ogni cosa sull'angolo aureo, essendo riusciti a trovare il relativo giusto valore, senza peraltro aver fatto nulla di speciale. Ma resta pur sempre da fare una cosa fondamentale: dimostrare con fatti geometrici a supporto della definizione di auricità, non solo dell'«angolo aureo», ma fare la stessa cosa per la «sezione aurea» che manca di altrettanto sostegno se non quello derivante dalla geometria del segmento. A tale scopo comincio col mostrare diverse situazioni geometriche relative a particolari intersezioni di coniche per dar luogo alla configurazione dell'«angolo aureo» in discussione, nonché la «sezione aurea».

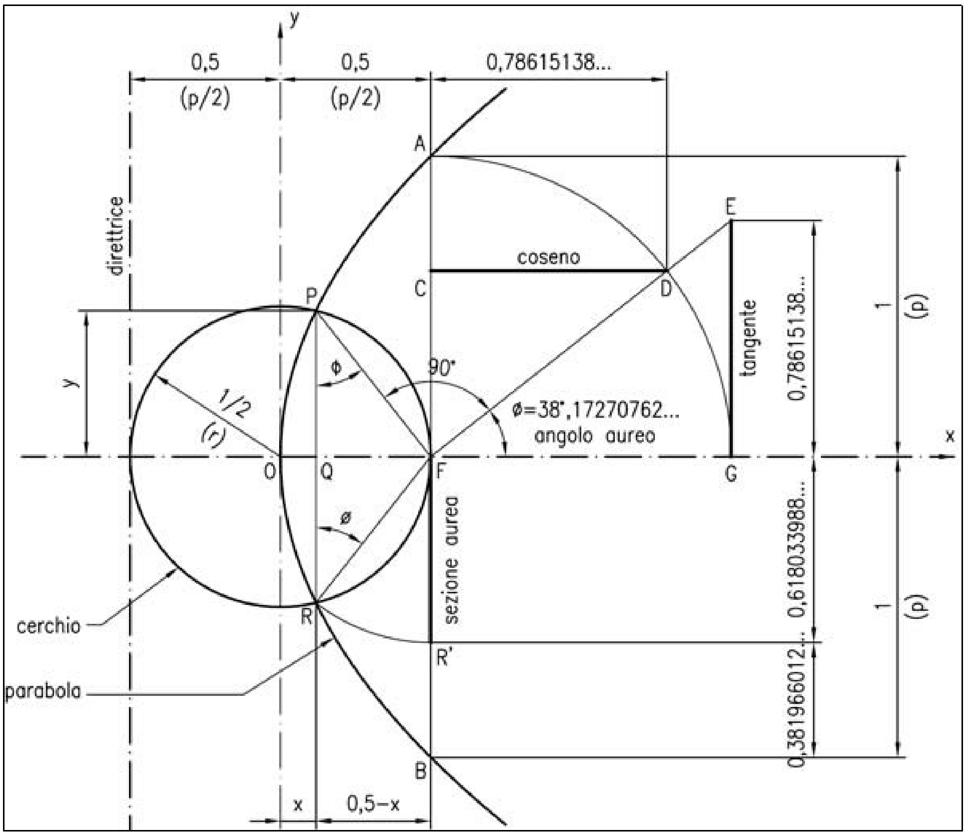

Illustrazione 2: Intersezione di un cerchio con una parabola.

INTERSEZIONE DI UN CERCHIO CON UNA PARABOLA

Il cerchio e la parabola che si intersecano hanno i seguenti parametri:

1. Parabola canonica: coordinate fuoco (p/2,0); direttrice x = -p/2 .
2. Cerchio: raggio r = p/2; coordinate centro (0,0) coincidente col vertice dell'origine parabola con l'asse X.
3. Se P è il punto d'intersezione della parabola col cerchio, F il fuoco della parabola e Q la proiezione di P sull'asse x, l'angolo QPF è quello ricercato che risulta, dal calcolo, pari a 38,1727076...°.
4. Il calcolo è impostato sulla risoluzione di un sistema di due equazioni, quella della parabola, $x^2+y^2 = r^2$ e del cerchio, $y^2 = 2px$.
5. La tangente del suddetto angolo di 38,172707076...° dedotto dai suddetti calcoli è 0,78615138...
6. In riferimento all'angolo, di cui la punto 3, che ho chiamato aureo, configurato nel triangolo rettangolo QPF, il lato PF di questi, che collega il punto di intersezione P al fuoco della parabola F, è 0,618033988..., che è anche il numero aureo reciproco, f–1, della serie di Fibonacci, quello della sezione aurea o media ragione!

Calcoli

1. Equazione della parabola: $y^2 = 2px$;
2. equazione del cerchio: $x^2+y^2 = r^2$;
3. sostituendo la y^2 del cerchio con la y^2 della parabola si ha che $x^2+2px = r^2$;

4. ma p = 1 ed r = ½;
5. pertanto l'equazione della 3. è $x^2+2x = ¼$, ovvero $x^2+2x–¼ = 0$;
6. trattandosi di un'equazione di 2° grado, si risolve con la formula: x= [–b±v(b^2–4ac)]/2 a, così si ha che x = [–2±√(4+1)]/2 = 0, 118033988... ; da y^2 = 2px = 2x, perciò y=v(2x) = √(2·0,118033988) = 0,485868271... ;
7. si possono, a questo punto, conoscere le funzioni dell'angolo aureo: tang Ø = cos Ø = (½–x)/y = 0,381966012.../0,485868271... = 0,78615138... ;
8. l'«angolo aureo» Ø = arctang 0,78615138... = 38,17270762701224749346830133292 5...° ;
9. Infine si delinea anche la sezione aurea o media ragione attraverso il lato PF del triangolo PQF: PF = 0,5+x = 0,618033988... che è il numero di Fibonacci tendente ad f.

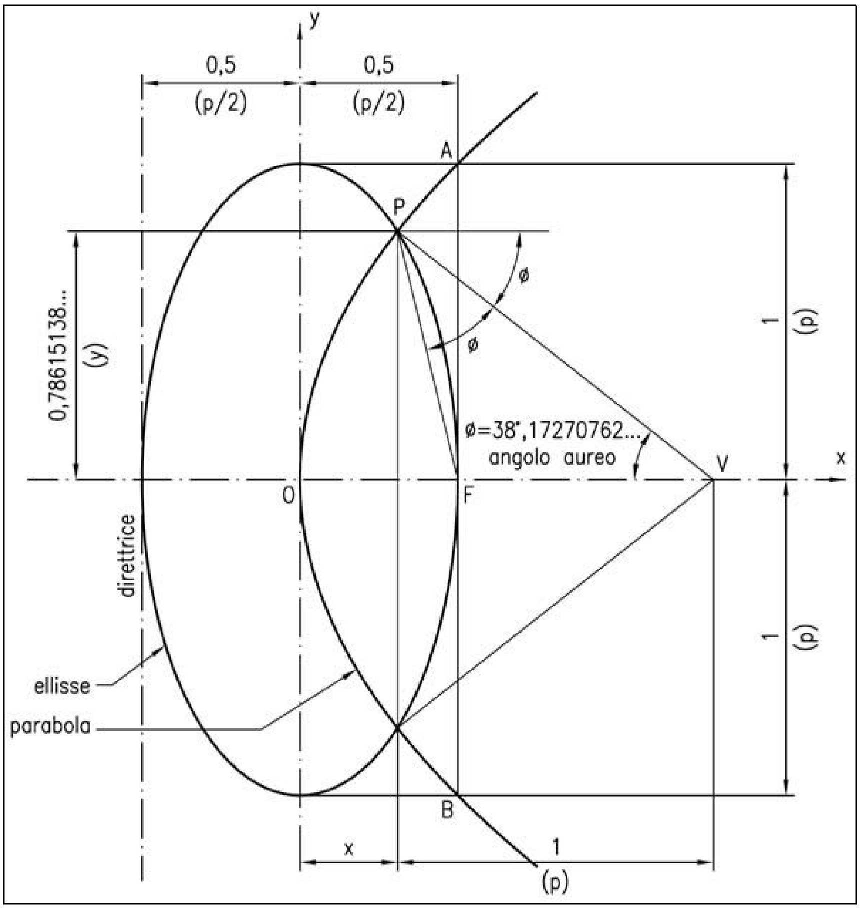

Illustrazione 3: Intersezione di una parabola con un'ellisse

INTERSEZIONE DI UNA PARABOLA CON UN ELLISSE

Se l'intersezione di un determinato cerchio con la relativa parabola appropriata, come già visto, porta all'«angolo aureo», altre intersezioni di coniche portano allo stesso scopo. Così può essere facendo intersecare la parabola, prima considerata di coordinate fuoco (p/2,0) e direttrice (x = –p/2), con una ellisse di coordinate centro (0,0), segmenti a = p e b = p/2, per dar luogo, appunto, ad un'ascissa, y = 0,786151138..., che è, poi, il valore della tangente dell'angolo aureo in questione. Da qui la configurazione di un triangolo isoscele regolare il cui semiangolo ai loro vertici è, appunto, quello aureo. La peculiarità di queste figure piane derivanti è di avere i due lati obliqui ortogonali alla parabola su cui insistono. Le loro basi, ovviamente, riguardano l'ordinata derivante dalla suddetta intersezione delle due coniche. Altra peculiarità è l'altezza di queste due figure che è uguale alla p della parabola. Tutto ciò sancisce una legge geometrica a riguardo secondo cui qualsiasi triangolo isoscele, che ha i lati obliqui ortogonali alla parabola su cui poggia, ha l'altezza costante sempre uguale alla p della parabola.

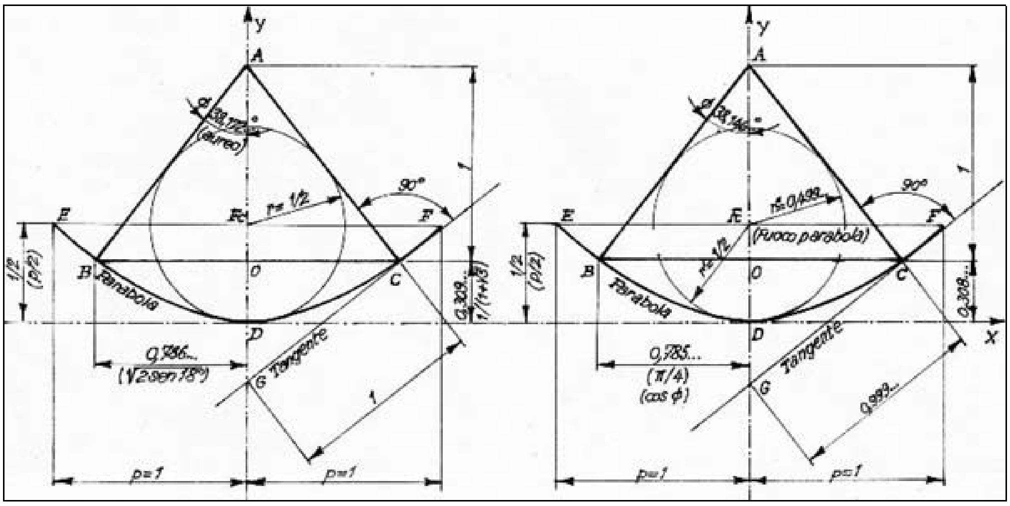

Illustrazione 4: Il triangolo isoscele ottenuto col semiangolo al vertice (grafico a sinistra), di tangente e coseno uguali fra loro, che ho definito aureo, a differenza di quello analogo (grafico a destra), la cui tangente è π/4 per dar luogo alla perfetta «quadratura del cerchio», geometricamente non presenta una configurazione con numeri razionali come nell'altro caso.

COERENZA DELL'ANGOLO AUREO

La concezione dell'angolo aureo mi ha portato, poi, a capire che il mondo della geometria, ed in particolare delle cosiddette coniche, ha del meraviglioso a dir poco. Ma ciò che stupisce è che si rivela un'armonia incredibile, proprio attraverso l'angolo aureo, esaminando il caso dell'analogo triangolo isoscele accoppiato ad una parabola come nella tav.04 a sinistra e non tanto con l'altro, quello della corrispondente geometria relativa a pi greco, nella tav.04 a destra, che non trova modo di armonizzarsi con ciò che vi è "prossimo"

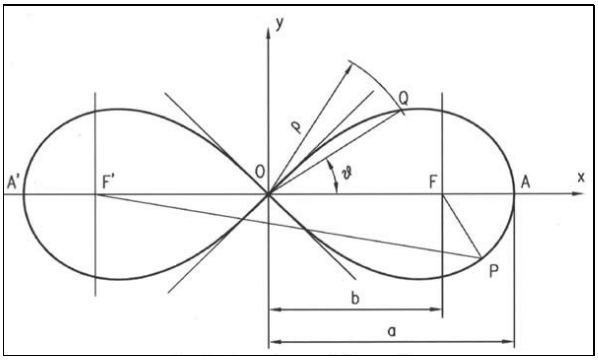

Illustrazione 5: Lemniscata di Bernoulli.

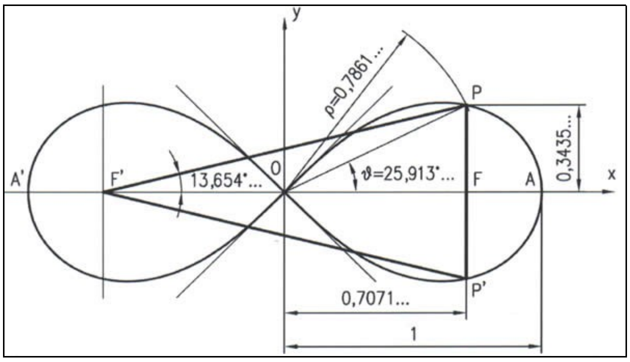

Illustrazione 6: Lemniscata di Bernoulli. Segmento OP: coseno e tangente dell'angolo aureo. (OF = √2)

L'ANGOLO AUREO NELLA LEMNISCATA DI BERNOULLI

La «Lemniscata di Bernoulli» (da lemniscato: lemnisco, corona, palma) è il nome di una particolare ovale di Cassini. Si tratta del luogo dei punti di un piano per i quali il prodotto delle distanze PF', PF da due punti fissi F', F (tav.05) è costante e precisamente è uguale al quadrato della semidistanza dei due punti; è una quartina razionale bicircolare con un punto doppio nodale e tangenti ortogonali nel punto medio del segmento AB; ha equazione cartesiana: $(x^2+y^2) = 2a(x^2-y^2)$; e polare: $\rho = a\sqrt{(\cos 2\theta)}$.

Dunque, ridisegnando la «Lemniscata di B.» (tav.06), premesso che a = 1, si congiungano F', P e P', ottenendo così un triangolo isoscele. In seno a questo triangolo congiungando poi P con O si individua il valore della tangente dell'angolo aureo calcolata nel precedente capitolo. Infatti sviluppando l'equazione polare della «Lemniscata di Bernoulli» si verifica che il valore supposto è giusto.
Da: $\rho = a \sqrt{(\cos 2\theta)}$ si perviene al valore di $\phi = 25{,}91364623...°$ che permette di verificare, appunto, l'esattezza di $F'O = FO = 1 / \sqrt{2}$.
Riguardo al triangolo isoscele F'PP', il semiangolo al vertice F' si calcola con la formula arctg PF / F'F che dà come risultato 13,6545848...°. Niente di più facile dedurre che quest'angolo conduce all'individuazione dell'angolo aureo. Infatti l'angolo in questione si ottiene in questo caso così:

$$\phi = (90°-13{,}6545848...°) / 2 = 38{,}17270762...°$$

L'ANGOLO AUREO NELLA GEOMETRIA DEL PENTAGRAMMA.

LA CURVA AUREA

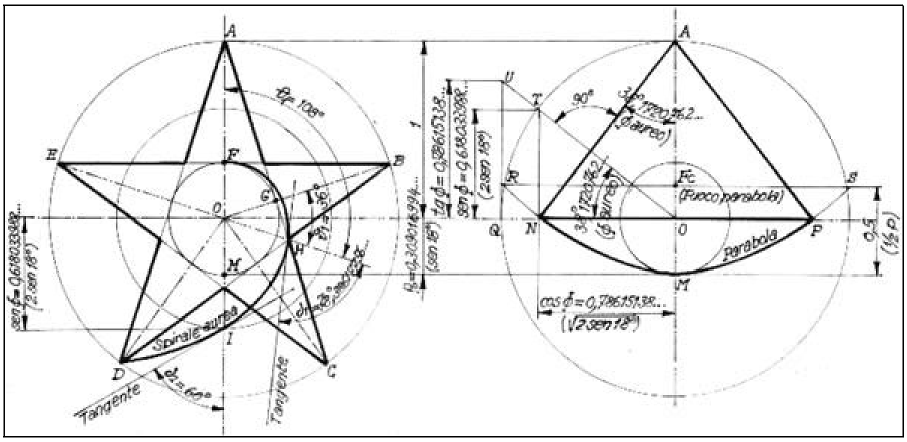

Illustrazione 7: A sinistra: configurazione del segmento aureo attraverso il diametro del cerchio inscritto al pentagramma, o il raggio intermedio intersecante nel punto I la curva aurea. A destra: geometria del triangolo isoscele per risalire alla configurazione.

Non c'è configurazione geometrica che non permetta di risalire all'individuazione dell'angolo aureo. Nel caso di geometrie stellari di qualsiasi tipo, è interessante l'itinerario geometrico per giungere a questo fine. Per esempio, esaminando il caso del pentagramma rappresentato sulla tav.07 a sinistra, a differenza di tante altre del genere, si dimostra veramente speciale. Come accennato con la didascalia della suddetta illustrazione, si configura a prima vista il segmento aureo attraverso il diametro del circolo inscritto al pentagramma, cosa che non si rivela attraverso altre geometrie con numero diverso di angoli salienti. Lo stesso risultato si ottiene col raggio intermedio intersecante nel punto I della curva passante per i punti F, H, I, D. A ragione di questa particolare condizione, questa curva non può che stimarsi parente del segmento aureo e dell'angolo aureo e, perciò, aurea anch'essa. A questo punto, disponendo del segmento aureo, rifacendoci alle precedenti argomentazioni geometriche relative alle diverse intersezioni di coniche ed altro, è possibile risalire all'angolo aureo. Però è interessante procedere come rappresentato sulla tav.07 a destra, per arrivare a disegnare il corrispondente triangolo isoscele, con la base poggiante su una parabola, avente il semiangolo al vertice pari all'angolo aureo ricercato. Di questo triangolo se ne è già parlato in relazione alla tav.07, a sinistra. Di altro sul pentagramma mostro di seguito un sintetico formulario di calcolo:

$\rho = \rho_o / \cos \theta/3$ (raggio polare);
$\rho_o = r \text{ sen } 360/4n$; (raggio polare cerchio interno);
$r = 1$; (raggio cerchio esterno);
n = numero divisioni poligramma
$\delta = \text{arctg } 3 \text{ ctg } \phi / 3$, (angolo tangente della spirale con il raggio polare).

Concludendo, si deve alla geometria del pentagramma la semplificazione del calcolo dell'angolo aureo attraverso la formula:

$$\phi \text{ aureo} = \text{arctang } \sqrt{(2\text{sen}18°)} = 38{,}1727070763...° \; [= \text{arcos } \sqrt{(2\text{sen}18°)}]$$