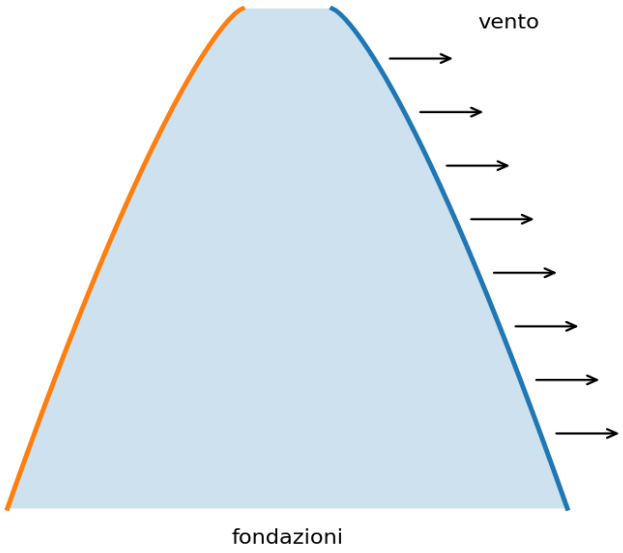
LA TORRE EIFFEL

Il calcolo integrale dietro la forma di una grande struttura



Dispensa didattica • Matematica, fisica e ingegneria

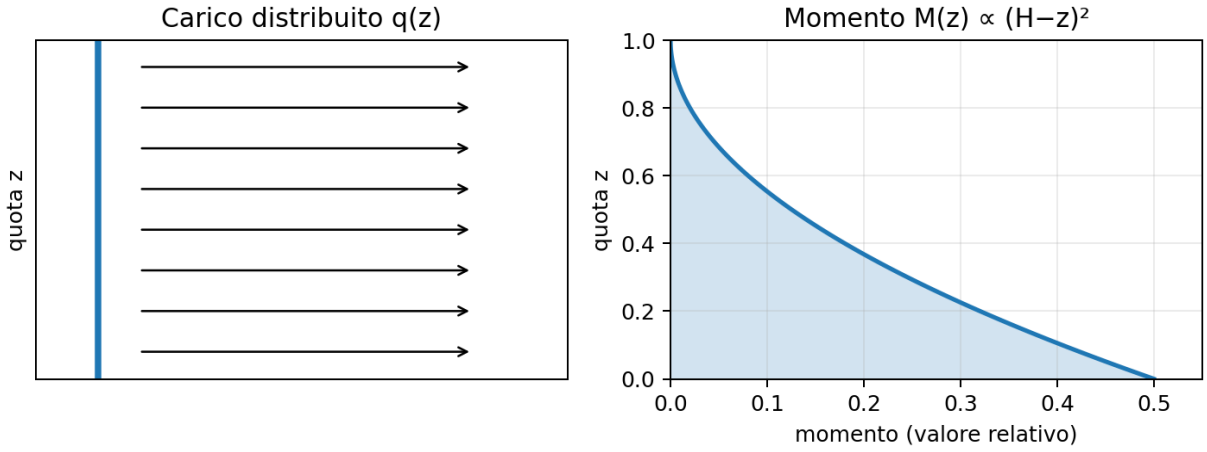
Obiettivo. Capire come una distribuzione di forze, il calcolo integrale e un principio geometrico di equilibrio possano contribuire a spiegare la forma rastremata della Torre Eiffel.

Nota storica essenziale. La torre non fu progettata da Gustave Eiffel da solo e non nacque dalla soluzione di un singolo integrale. Il progetto iniziale fu sviluppato dagli ingegneri Maurice Koechlin ed Émile Nouguier, con il contributo dell'architetto Stephen Sauvestre, all'interno dell'impresa di Eiffel. La spiegazione matematica più specifica del profilo basata sul principio del vento è una ricostruzione moderna pubblicata da Weidman e Pinelis nel 2004.

1. Il problema ingegneristico

La Torre Eiffel fu costruita per l'Esposizione Universale del 1889. La sua altezza originaria era di circa 300 m; con l'antenna oggi raggiunge circa 330 m. La struttura deve sopportare il proprio peso, l'azione del vento, le variazioni termiche e le sollecitazioni trasmesse tra montanti, travi e controventi.

Il vento è particolarmente importante perché esercita una pressione sulla superficie esposta e genera forze orizzontali. Queste forze tendono a far flettere la struttura e producono un momento ribaltante, massimo in prossimità delle fondazioni.



Schema didattico: a sinistra una forza distribuita lungo l'altezza; a destra il momento flettente relativo a un carico uniforme. Non è il diagramma di calcolo della torre reale.

Idea chiave: la parte inferiore deve trasferire al terreno gli effetti accumulati dei carichi applicati a quote superiori. Per questo la struttura si allarga verso il basso e i suoi elementi sono dimensionati in modo non uniforme.

2. Dal vento al momento flettente: il primo integrale

Modelliamo la torre, per il momento, come una mensola verticale di altezza H, incastrata al suolo. Indichiamo con z la quota misurata dal terreno (z = 0 alla base e z = H in cima). Sia q(s) la forza orizzontale del vento per unità di altezza, espressa per esempio in N/m.

Consideriamo una sezione alla quota z. Una striscia infinitesima alla quota s, di altezza ds, subisce la forza dF = q(s) ds. Il suo braccio rispetto alla sezione è s − z. Il contributo al momento è quindi dM = (s − z) q(s) ds.

Sommando tutti i contributi da z fino alla sommità H si ottiene:

$$\mathbf{M(z) = \int_z^H (s - z)\, q(s)\, ds}$$

Questa formula esprime il momento flettente dovuto ai carichi del vento che agiscono sopra la sezione considerata. L'integrale è una somma continua di momenti infinitesimi.

Esempio: carico uniforme

Se, per semplicità, $q(s) = q_0$ è costante, allora:

$$\mathbf{M(z) = q_0 \int_z^H (s - z)\, ds = (q_0/2)(H - z)^2}$$

Alla sommità M(H) = 0; alla base $M(0) = q_0 H^2/2$. Il momento cresce scendendo verso il terreno. È un modello introduttivo: nella realtà la pressione del vento, la larghezza esposta e la risposta aerodinamica variano con la quota.

3. Perché il profilo non è una semplice trave

La Torre Eiffel è una struttura reticolare tridimensionale: quattro grandi montanti inclinati sono collegati da travi, diagonali e piattaforme. Il carico viene ripartito tra molti elementi. Non è quindi corretto identificare direttamente la sagoma esterna con il diagramma del momento di una mensola piena.

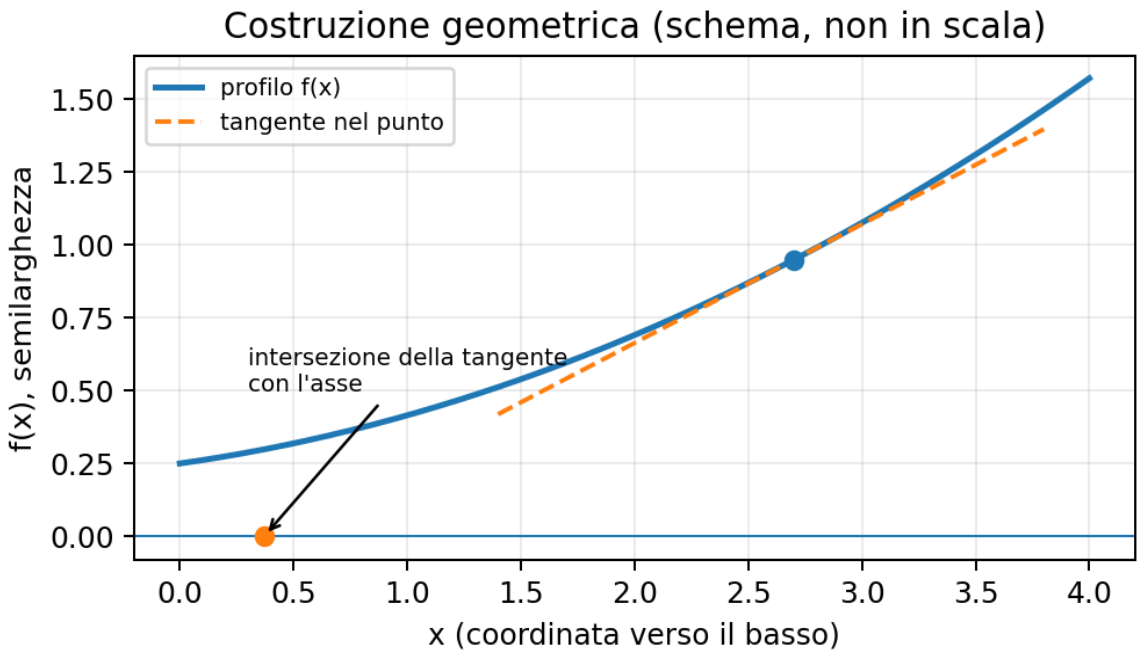
Nella teoria elementare della flessione, la tensione massima è spesso scritta come $\sigma_{max} = M/W$, dove W è il modulo di resistenza della sezione. Se il momento è maggiore, in generale occorre una capacità resistente maggiore. Ma per una struttura reticolare W non è una proprietà di una sezione piena unica: dipende dalla posizione e dalla geometria dei montanti e dei collegamenti.

Il punto didattico corretto è dunque questo: il profilo è legato al modo in cui la struttura raccoglie e trasferisce i carichi, ma la forma reale nasce da un progetto strutturale completo, non da una sola formula.

4. Il principio geometrico attribuito a Eiffel

Nella comunicazione del 30 marzo 1885 alla Société des Ingénieurs Civils de France, Eiffel descrisse un criterio per la curvatura dei montanti: le tangenti ai montanti, tracciate a una stessa quota, dovevano incontrarsi nel punto di applicazione della risultante delle pressioni del vento sulla porzione di torre soprastante.

Per tradurre questa idea in matematica, consideriamo un profilo piano idealizzato. Sia x la coordinata verticale misurata verso il basso a partire da una quota iniziale x_0, e sia f(x) la semilarghezza della torre a quella quota. La superficie proiettata al vento tra x_0 e x è proporzionale a $\int f(t)\,dt$.



Schema geometrico originale: il punto in cui la tangente incontra l'asse è messo in relazione con il baricentro della superficie esposta al vento. La curva è illustrativa, non è il rilievo della Torre Eiffel.

Con pressione uniforme, il punto di applicazione della risultante è il baricentro della superficie proiettata. La sua coordinata è:

$$\bar{x} = \left[\int_{x_0}^{x} t\, f(t)\,dt\right] / \left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right]$$

La tangente al profilo nel punto (x, f(x)) ha equazione $y - f(x) = f'(x)(X - x)$. La sua intersezione con l'asse $y = 0$ ha ascissa $X = x - f(x)/f'(x)$. Il criterio geometrico consiste nell'uguagliare questa ascissa alla posizione $\bar{x}$ della risultante.

5. L'equazione integro-differenziale

Uguagliando l'intersezione della tangente e il baricentro:

$$x - f(x)/f'(x) = \left[\int_{x_0}^{x} t\, f(t)\, dt\right] / \left[\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right]$$

Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene:

$$f(x) \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = f'(x) \int_{x_0}^{x} (x - t)\, f(t)\, dt$$

È un'equazione integro-differenziale non lineare: compare la funzione f, la sua derivata f′ e integrali della funzione stessa. Essa formalizza, in un modello idealizzato, il legame tra profilo e risultante del vento.

6. Dall'integrale a un'equazione differenziale

Introduciamo la funzione ausiliaria:

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \text{quindi} \quad Y'(x) = f(x)$$

Definiamo anche $I(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t)\, f(t)\, dt$. Per il teorema fondamentale del calcolo, $I'(x) = Y(x)$. L'equazione precedente diventa $Y'Y = Y''I$. Derivando e sostituendo $I' = Y$, si ricava:

$$Y\, Y''' = Y'\, Y''$$

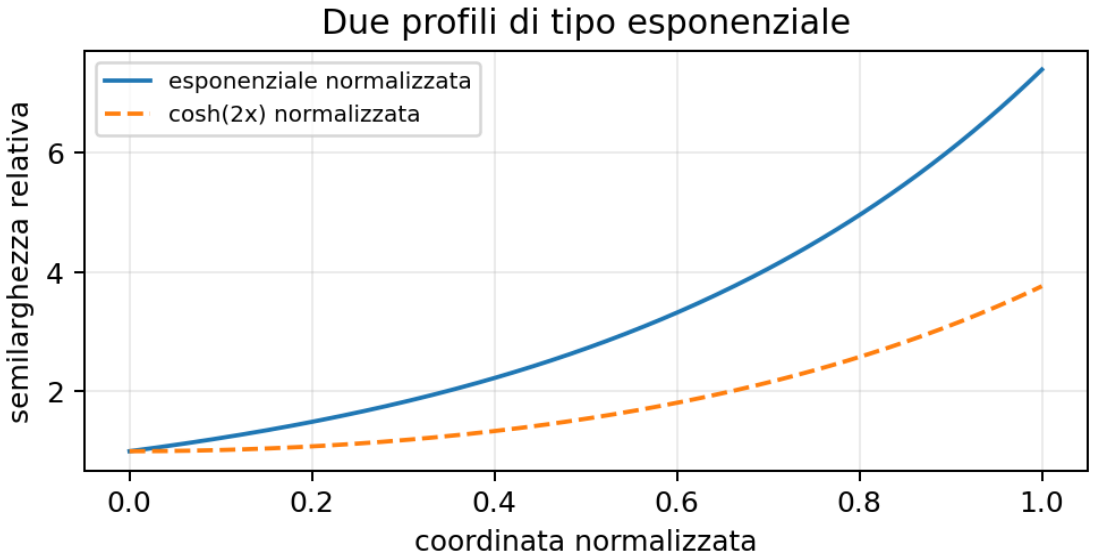
Nell'intervallo in cui Y e Y″ non sono nulli, dividiamo per Y Y″ e otteniamo $Y'''/Y'' = Y'/Y$. Integrando:

$$\ln|Y''| = \ln|Y| + \text{costante} \Rightarrow Y'' = \gamma^2 Y$$

Questa è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. La sua soluzione generale è $Y = A\, e^{\gamma x} + B\, e^{-\gamma x}$. Poiché $Y(x_0) = 0$ per la definizione dell'integrale, la soluzione può essere scritta come $Y(x) = C \sinh[\gamma(x - x_0)]$. Di conseguenza:

$$f(x) = Y'(x) = C\gamma \cosh[\gamma(x - x_0)]$$

Il profilo risultante è di tipo iperbolico-coseno; per $\gamma(x - x_0)$ grande, $\cosh(u) \approx e^u/2$, quindi il profilo assume un andamento esponenziale. La letteratura descrive infatti il risultato come un profilo esponenziale, e il confronto con le misure della torre è ben rappresentato da due tratti esponenziali con tassi di crescita differenti.



Confronto qualitativo tra una curva esponenziale e una curva cosh normalizzate. Non si tratta di un fit ai dati misurati della torre.

7. Che cosa significa — e che cosa non significa — il risultato

Significa che, adottando ipotesi semplificatrici (profilo continuo, pressione del vento uniforme sulla proiezione, geometria idealizzata e criterio delle tangenti), il principio geometrico può essere tradotto in un'equazione integro-differenziale la cui soluzione è di tipo esponenziale.

Non significa che Eiffel abbia calcolato la torre risolvendo proprio questa equazione nel 1885. Weidman e Pinelis hanno ricostruito nel 2004 un modello matematico coerente con la descrizione storica di Eiffel. Gli stessi autori distinguono questo modello da altre spiegazioni popolari della forma, come quella basata sulla costanza della tensione di compressione, che non è riconducibile agli scritti di Eiffel.

Non significa neppure che la torre reale sia una curva liscia perfetta. È una struttura reticolare a pannelli, con geometria discreta, piattaforme, collegamenti, vincoli costruttivi e coefficienti di sicurezza. La sua progettazione richiese calcoli strutturali molto più ampi.

8. Attività per la classe

Attività A — momento flettente con carico uniforme

Una mensola verticale ha altezza H = 100 m ed è sottoposta a un carico orizzontale uniforme q_0 = 2 kN/m. Calcolare il momento alla quota z = 40 m e alla base.

Soluzione: $M(z) = q_0(H - z)^2/2$. A z = 40 m: $M = 2 \cdot 60^2/2 = 3600$ kN·m. Alla base: $M(0) = 2 \cdot 100^2/2 = 10\,000$ kN·m.

Attività B — interpretazione del baricentro

Spiegare perché il baricentro della superficie proiettata non coincide in generale con la metà dell'altezza del tratto considerato. Suggerimento: la larghezza f(t) cambia con la quota, quindi le strisce più larghe pesano maggiormente nel calcolo dell'area e del momento statico.

Attività C — discussione critica

Quali ipotesi del modello potrebbero non essere realistiche? Gli studenti possono citare: pressione del vento non uniforme, interazione aerodinamica, reticolo discreto, variazione della sezione resistente, peso proprio, piattaforme e dettagli dei collegamenti.

9. Riepilogo delle formule

Grandezza	Formula	Significato
Momento del vento	$M(z) = \int_z^H (s-z)q(s)ds$	Somma dei momenti delle forze distribuite sopra la sezione
Carico uniforme	$M(z) = q_0(H-z)^2/2$	Momento in una mensola idealizzata
Baricentro proiettato	$\bar{x} = \int tf(t)dt \,/\, \int f(t)dt$	Punto di applicazione della risultante del vento
Profilo e tangente	$x - f/f' = \bar{x}$	Condizione geometrica del modello attribuito al principio di Eiffel
Equazione ridotta	$Y\,Y''' = Y'Y''$	Forma differenziale equivalente nel modello
Profilo risultante	$f(x) \propto \cosh[\gamma(x-x_0)]$	Andamento di tipo esponenziale

10. Fonti e approfondimenti

• P. Weidman, I. Pinelis, “Model equations for the Eiffel Tower profile: historical perspective and new results”, Comptes Rendus Mécanique, 332 (2004), pp. 571–584. DOI: 10.1016/j.crme.2004.02.021. Articolo scientifico: https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/articles/10.1016/j.crme.2004.02.021/

• G. Eiffel, “Projet d'une tour en fer de 300 mètres de hauteur destinée à l'Exposition de 1889”, comunicazione alla Société des Ingénieurs Civils de France, 1885, pp. 345–370. È la fonte storica primaria sul progetto e sul ragionamento relativo al vento.

• Sito ufficiale della Torre Eiffel: https://www.toureiffel.paris/ — per la storia, le caratteristiche e le informazioni sul monumento.

Immagini e licenza. Le figure presenti in questa dispensa sono schemi e grafici originali realizzati appositamente per scopi didattici; non riproducono fotografie di terzi né dati di rilievo. Possono essere riutilizzate e adattate con attribuzione: “Schemi originali, dispensa didattica sulla Torre Eiffel, 2026”. Per fotografie storiche o contemporanee open-license da aggiungere, consultare Wikimedia Commons e verificare la licenza specifica del singolo file: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Eiffel_Tower.

Conclusione

Il calcolo integrale permette di passare dalle forze distribuite ai loro effetti complessivi. Nel modello storico-matematico associato al ragionamento di Eiffel, il baricentro della superficie esposta al vento viene collegato alla tangente del profilo dei montanti. Da questa condizione nasce un'equazione integro-differenziale e un profilo di tipo esponenziale. La torre reale, tuttavia, è il risultato di un progetto ingegneristico complesso: la matematica ne illumina il principio, ma non esaurisce tutte le verifiche necessarie per costruirla.