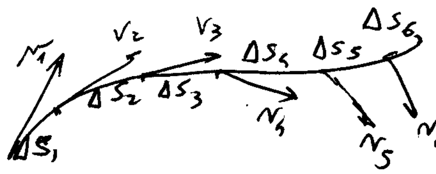
CIRCUITAZIONE DI UN VETTORE

SI DICE <u>CIRCUITAZIONE</u> DI UN VETTORE $\vec{v}$ LUNGO LA LINEA l L'ESPRESSIONE:

$$C(\vec{v})_l = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{\Delta s}_i$$



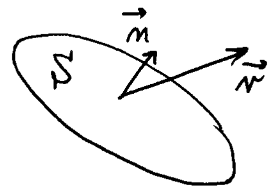
SI DIVIDE CIOÈ LA LINEA l IN TANTISSIMI INTERVALLINI INFINITESIMI, CIASCUNO DI AMPIEZZA Δs, ALL'INTERNO DEI QUALI IL VETTORE $\vec{v}$ SI PUÒ RITENERE COSTANTE. SE $\vec{v}$ RAPPRESENTA UN VETTORE FORZA, LA SUA CIRCUITAZIONE VIENE A COINCIDERE CON IL <u>LAVORO</u> ($L = \vec{F} \cdot \vec{s}$), DI CUI APPUNTO LA CIRCUITAZIONE È UNA GENERALIZZAZIONE.

SE UN CAMPO È <u>CONSERVATIVO</u>, LA SUA CIRCUITAZIONE LUNGO UN PERCORSO <u>CHIUSO</u> È <u>NULLA</u> (ES. IL CAMPO GRAVITAZIONALE ED IL CAMPO ELETTROSTATICO)

FLUSSO DI UN VETTORE

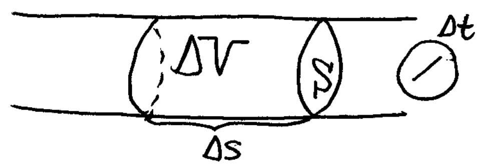
DATO UN CAMPO VETTORIALE UNIFORME, IL SUO <u>FLUSSO</u> ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE PIANA È DATO DA:

$$\Phi(\vec{v}) = S\,\vec{v} \cdot \vec{n}$$



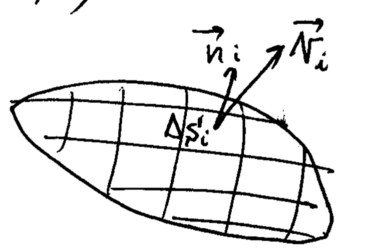
DOVE $\vec{n}$ È IL VERSORE <u>NORMALE</u> ALLA SUPERFICIE, CIOÈ IL VETTORE UNITARIO CHE HA DIREZIONE ORTOGONALE A S. IL FLUSSO È UNA GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI "PORTATA D'ACQUA" IN UN TUBO, DOVE SI HA:

$$S \cdot v = S \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S\,\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$



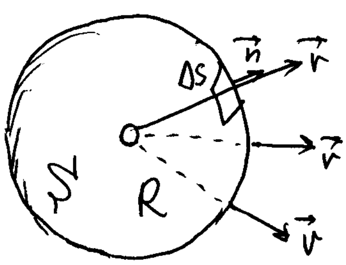
(v È LA VELOCITÀ DELL'ACQUA NEL TUBO, Δs LO SPOSTAMENTO NEL TEMPO UNITARIO, $S\Delta s$ È IL VOLUME ΔV DI ACQUA CHE ATTRAVERSA LA SEZIONE NEL TEMPO UNITARIO, CIOÈ LA PORTATA VOLUMICA IN m^3/s)

SE LA SUPERFICIE NON È PIANA, LA SI SCOMPONE IN TANTE AREOLE ΔS_i DI VERSORE NORMALE $\vec{n}_i$, E SI HA:



$$\Phi(\vec{v})_S = \sum_i \Delta S_i \, \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i$$

<u>ESEMPIO</u> – IL FLUSSO DI UN VETTORE RADIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA CENTRATA NELLA SORGENTE DI CAMPO È FACILMENTE CALCOLABILE, POICHÉ $\vec{v}_i$ ED $\vec{n}_i$ SONO SEMPRE PARALLELI, PER CUI $\cos\alpha_i = 1$. $\vec{v}$ È COSTANTE SU TUTTA LA SUPERFICIE (IL CAMPO DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA DAL CENTRO) E DUNQUE ESCE DALLA SOMMATORIA:



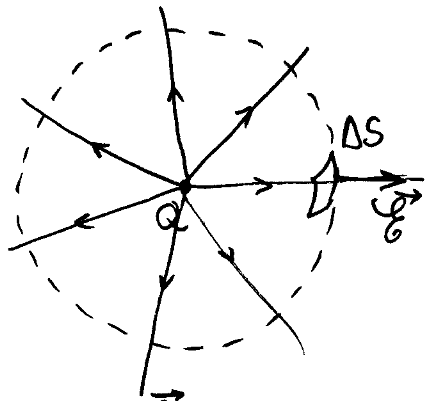
$$\Phi(\vec{v})_S = \sum_i \Delta S_i \, v = v\left(\sum_i \Delta S_i\right) = v\,S = 4\pi R^2 v$$

SE IL FLUSSO DI UN VETTORE $\vec{v}$ ATTRAVERSO UNA QUALUNQUE SUPERFICIE CHIUSA È <u>NULLO</u>, IL CAMPO SI DICE <u>SOLENOIDALE</u> (ES. IL CAMPO MAGNETICO)

IL TEOREMA DI GAUSS

IL TEOREMA DI GAUSS (DAL NOME DEL GRANDE MATEMATICO E FISICO CARL FRIEDRICH GAUß, BRAUNSCHWEIG 1777 - GÖTTINGEN 1855) PERMETTE IL CALCOLO DEL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E MAGNETICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA.

TH. DI GAUSS DEL CAMPO ELETTRICO: $\Phi(\vec{\mathcal{E}})_S = \dfrac{\Sigma Q}{\varepsilon}$ $\qquad (\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r)$



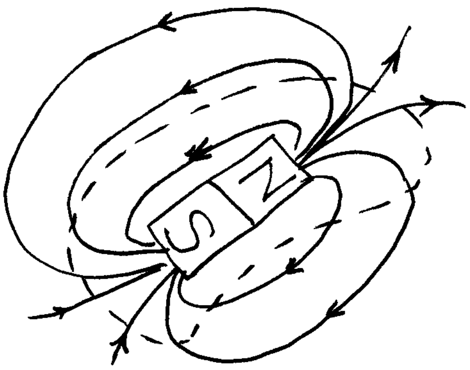
SIA UNA SUPERFICIE CHIUSA SFERICA NEL CUI CENTRO C'È LA CARICA Q, E IL CUI RAGGIO È R. SULLA DETTA SUPERFICIE IL CAMPO $\mathcal{E}$ È COSTANTE, PERCHÈ ESSO DIPENDE DALLA CARICA Q E DALLA DISTANZA R DA ESSA, CHE È COSTANTE. ALLORA:

$$\Phi(\vec{\mathcal{E}})_S = \Sigma_i \vec{\mathcal{E}}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \Sigma_i \mathcal{E}_i \Delta S_i =$$
$$= \mathcal{E} \Sigma_i \Delta S_i = \mathcal{E} S = \mathcal{E} \cdot 4\pi R^2$$

INFATTI $\vec{\mathcal{E}}$ È PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE, DUNQUE $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{n} = \mathcal{E} \cdot 1 \cdot \cos 0 = \mathcal{E}$.
E SOSTITUENDO L'ESPRESSIONE DI $\mathcal{E}$:

$$\Phi(\vec{\mathcal{E}})_S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

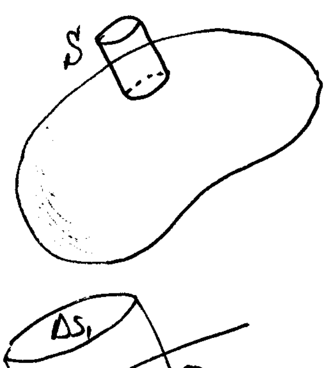
SE VI È UN MEZZO MATERIALE, AL POSTO DI ε_0 VI È ε.



TH. DI GAUSS DEL CAMPO MAGNETICO: $\Phi(\vec{B})_S \equiv 0$

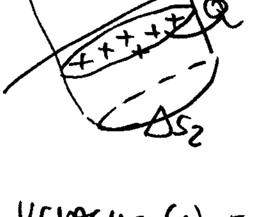
INFATTI LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO MAGNETICO SONO CHIUSE, DUNQUE TANTE ENTRANO QUANTE ESCONO DA UNA SUPERFICIE CHIUSA, ED IL FLUSSO TOTALE È NULLO. SE NE CONCLUDE CHE ESISTE IL MONOPOLO ELETTRICO (CARICA ELETTRICA), NON ESISTE IL MONOPOLO MAGNETICO.

TH. DI COULOMB - SIA UNA SUPERFICIE CHIUSA CHE DELIMITA UN MATERIALE CONDUTTORE, SUL QUALE VI È UNA DENSITÀ DI CARICA σ. CONSIDERIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA S A FORMA DI UN CILINDRETTO, LE CUI BASI SONO PARALLELE ALLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE, UNA ALL'INTERNO ED UNA ALL'ESTERNO, E LA CUI SUPERFICIE LATERALE SIA AD ESSA PERPENDICOLARE. CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO QUESTO CILINDRETTO. CON IL TH. DI GAUSS HO:



$$\Phi(\vec{\mathcal{E}})_S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\Delta S \cdot \sigma}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

DOVE ΔS È L'AREA DELLA SEZIONE DEL CILINDRETTO. CALCOLIAMO QUESTO FLUSSO CON LA DEFINIZIONE. LA SUPERFICIE INTERNA ΔS_2 HA FLUSSO NULLO (DENTRO IL CONDUTTORE NON C'È CAMPO), E COSÌ LA SUPERFICIE LATERALE, PERCHÈ È PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE. C'È FLUSSO SOLO ATTRAVERSO LA BASE ALL'ESTERNO, ΔS_1. HO COSÌ:



$$\Phi(\vec{\mathcal{E}})_S = \Phi(\vec{\mathcal{E}})_{\Delta S_1} = \mathcal{E} \cdot \Delta S \qquad (2)$$

UGUAGLIO (1) E (2) ED HO: $\dfrac{\cancel{\Delta S} \cdot \sigma}{\varepsilon_0} = \mathcal{E} \cdot \cancel{\Delta S} \implies \boxed{\mathcal{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$