RIDUZIONE A FORMA CANONICA DELL'EQUAZIONE DI UNA CONICA

1_ PARABOLA

$$\left.\begin{array}{ll} \text{NORMALE} & 3x^2 - y = 0 \\ \text{TRASLATA} & 3x^2 - 2x - y + 1 = 0 \\ \text{ROTOTRASLATA} & x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right\} b^2 - 4ac = 0$$

ELLISSE

$$\left.\begin{array}{ll} \text{TRASLATA} & 5x^2 + 9y^2 - 20x - 36y + 11 = 0 \\ \text{NORMALE} & 5x^2 + 9y^2 = 45 \\ \text{ROTOTRASLATA} & 23x^2 - 18xy + 23y^2 - 104x - 232y + 624 = 0 \\ \text{NORMALE} & 14x^2 + 32y^2 = 448 \end{array}\right\} b^2 - 4ac < 0$$

IPERBOLE

$$\left.\begin{array}{ll} \text{TRASLATA} & 36x^2 - 64y^2 + 36x + 128y - 199 = 0 \\ \text{NORMALE} & 9x^2 - 16y^2 = 36 \\ \text{DEGENERE NEGLI ASINTOTI} & 3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 8 = 0 \\ \text{ROTOTRASLATA} & 33x^2 - 39y^2 + 54xy - 306x - 6y + 241 = 0 \\ \text{NORMALE} & 42x^2 - 48y^2 - 224 = 0 \end{array}\right\} b^2 - 4ac > 0$$

NB_ Nelle equazioni delle coniche è presente il termine rettangolare in xy quando queste sono ruotate rispetto agli assi.

- Nelle equazioni delle coniche a centro, cioè

ellisse e iperbole che hanno centro di simmetria, compaiono i termini di primo grado in x e in y quando il centro non è l'origine
- Il trinomio di secondo grado è invariante per traslazione
- La grandezza b^2-4ac è nulla per la parabola, negativa per l'ellisse, positiva per l'iperbole

2- EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA INVARIANTI ORTOGONALI

Riferito il piano a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si chiama CONICA una curva γ che ammette un'equazione di secondo grado

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

con coefficienti reali.
Vediamo come variano i coefficienti di γ al cambiare degli assi coordinati.
Operiamo una traslazione definita dalle relazioni

$$\begin{cases} x = X+h \\ y = Y+K \end{cases}$$

Così si ottiene l'equazione di γ nel nuovo sistema di riferimento:

$$a\cdot(X+h)^2+2b(X+h)(Y+K)+c(Y+K)^2+2d(X+h)+2e(Y+K)+f=0$$

Da questo, eseguendo i calcoli, si deduce l'equazione:

$$AX^2+2BXY+CY^2+2DX+2EY+F=0 \qquad (1)$$

dove:

$$\begin{cases} A=a \\ B=b \\ C=c \\ D=ah+bK+d \\ E=bh+cK+e \\ F=ah^2+2bhK+cK^2+2dh+2eK+f \end{cases}$$

Eseguendo invece una rotazione di assi, definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

si ottiene una equazione del tipo (1) i cui coefficienti sono:

$$\begin{cases} A = a\cos^2\alpha + 2b\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ 2B = -2a\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + 2b(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha) + 2c\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ C = a\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha \\ D = d\cos\alpha + e\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ E = -d\,\mathrm{sen}\,\alpha + e\cos\alpha \\ F = f \end{cases}$$

Sia nel caso in cui si esegue la traslazione di assi, sia nel caso in cui si esegue la rotazione, risulta

$$a+c = A+C$$

$$ac-b^2 = AC-B^2 \qquad \text{cioè} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Pertanto il valore delle espressioni

$$I_1 = a + c \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

formate con i coefficienti dell'equazione della curva γ, resta inalterato quando si esegue un qualunque cambiamento d'assi, il quale è o una traslazione, o una rotazione, o l'inversione dell'orientamento di uno degli assi, oppure il prodotto di due o più delle suddette trasformazioni elementari.

Le tre espressioni I_1, δ, Δ prendono il nome di INVARIANTE LINEARE, INVARIANTE QUADRATICO, INVARIANTE CUBICO DEL POLINOMIO

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

3. TEOREMA DI EULERO

Scegliendo in modo opportuno un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, una equazione di secondo grado in due variabili

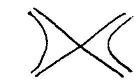
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

si può sempre ridurre a una delle forme canoniche seguenti:

1) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Ellisse 

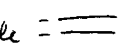
2) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Ellisse immaginaria 

3) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} = 0$ Punto

4) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} - \dfrac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Iperbole 

5) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} - \dfrac{y'^2}{\beta^2} = 0$ Coppia di rette incidenti 

6) $y'^2 - 2px' = 0$ Parabola 

7) $x'^2 - \alpha^2 = 0$ Coppia di rette parallele 

8) $x'^2 + \alpha^2 = 0$ Coppie di rette immaginarie parallele

9) $x'^2 = 0$ Coppie di rette coincidenti.

Le coniche del tipo 5), 7), 9) essendo spezzate in rette si dicono DEGENERI

Una conica del tipo 2) non è degenere, ma non possiede punti reali, perciò viene detta immaginaria

Una conica del tipo 8) è degenere in rette immaginarie

Dall'esame delle forme canoniche 3), 5), 7), 8) e 9) che rappresentano le coniche degeneri, risulta che

$$\Delta = 0$$