Da qui si deduce che vale il seguente

TEOREMA 1°

Una conica di equazione

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \qquad (2)$$

è degenere se, e solo se, il suo invariante cubico Δ è uguale a zero.

Infatti passando (con un cambiamento di coordinate cartesiane ortogonali) dall'equazione (2) ad una delle forme canoniche, l'invariante Δ non cambia di valore; quindi se è nullo per la forma canonica lo è anche per l'equazione (2) e per qualunque altra equazione ottenuta moltiplicando i coefficienti della (2) per un fattore costante $k\neq0$

Dall'esame delle forme 1), 2), 4), 6) relative a coniche non degeneri, risulta prima di tutto $\Delta\neq0$ e inoltre:

per l'ellisse $\quad \delta=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}>0$

per l'iperbole $\quad \delta=-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}<0$

per la parabola $\quad \delta=0$

Poiché il segno di δ non cambia passando dall'equazione (2) ad una forma canonica, si può concludere che vale il

TEOREMA 2

Se la conica è non degenere $(\Delta\neq0)$ allora essa è:

una ellisse (reale o immaginaria) $\quad$ se $\delta>0$
una iperbole $\quad$ se $\delta<0$
una parabola $\quad$ se $\delta=0$

Sussiste anche

TEOREMA 3

La conica, qualora sia reale e non degenere, è una iperbole equilatera se, e solo se, risulta:

$$I_1=a+c=0$$

Una ellisse è reale, se risulta $I_1\cdot\Delta<0$
ed è immaginaria se risulta $I_1\cdot\Delta>0$

	$\Delta\neq0$	$\Delta=0$
$\delta>0$	Ellisse: reale $(I_1\cdot\Delta<0)$; immaginaria $(I_1\Delta>0)$	Punto
$\delta<0$	Iperbole Se inoltre: $I_1=0$: iperbole equilatera	Rette incidenti Se inoltre: $I_1=0$ rette perpendicolari
$\delta=0$	Parabola	Rette parallele reali o immaginarie

4- CONICHE A CENTRO

Sia data una conica di equazione:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \qquad (3)$$

Si chiama centro della conica il punto del piano, se esiste, rispetto al quale la conica è simmetrica; cioè l'eventuale centro di simmetria della conica.

Le coniche che hanno il centro si dicono coniche a centro

Sussiste il seguente

TEOREMA.
Un pt. $S(x_0 y_0)$ è il centro della conica di equazione (3) se, e solo se le coordinate di S soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} ax+by+d=0 \\ bx+cy+e=0 \end{cases} \qquad (4)$$

Infatti, essendo S centro di simmetria, la (3) nella nuova forma deve avere $D=0$ ed $E=0$, cioè:

$$\begin{cases} ax_0+by_0+d=0 \\ bx_0+cy_0+e=0 \end{cases}$$

Questo sistema è determinato se, e solo se

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$$

Verificata questa condizione, risolvendo il sistema (4) si trovano le coordinate del centro.

Individuato $S(x_0 y_0)$, con la traslazione

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

la (3) assume la forma

$$aX^2+2bXY+cY^2+F=0$$

dove $F = dx_0+ey_0+f = \dfrac{\Delta}{\delta}$

Se invece è $\delta=0$, allora la conica o non ha centro, se il sistema (4) è impossibile, oppure ne ha infiniti, se il sistema (4) è indeterminato

Esempio - Verificare che l'equazione

$$3x^2-6xy+2y^2-4x+2y+1=0$$

rappresenta una conica a centro e trasformare l'equazione con una traslazione d'assi la cui nuova origine è il centro della conica.

La conica è a centro perché

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6-9 = -3 \neq 0$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x - 3y - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{si trova} \quad \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

che sono le coordinate del centro

$$C\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$$

con le sostituzione

$$\begin{cases} x = X - \frac{1}{3} \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$3X^2 - 6XY + 2Y^2 + \frac{2}{3} = 0$$

cioè $\quad 9X^2 - 18XY + 6Y^2 + 2 = 0$

questa equazione poteva ottenersi direttamente dalla quella data, ricordando che

$$A = a \qquad B = b \qquad C = c \qquad F = dx_0 + ey_0 + f = \frac{\Delta}{\delta}$$

5. RIDUZIONE DELL'EQUAZIONE DI UNA CONICA A CENTRO ALLA SUA FORMA CANONICA

Data una conica a centro

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

e determinato il centro $C(x_0 y_0)$, con le sostituzione

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

si giunge all'equazione

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0$$

Con una rotazione d'assi di un angolo α, data dalle equazioni

$$\begin{cases} X = X' \cos\alpha - Y' \operatorname{sen}\alpha \\ Y = X' \operatorname{sen}\alpha + Y' \cos\alpha \end{cases}$$

si giunge ad una ulteriore semplificazione.

Scegliamo α in modo che risulti, a trasformazione avvenuta $\quad b' = 0$

siccome $\quad 2b = -2a \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2b(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + 2c \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$

$$= (c-a)\operatorname{sen} 2\alpha + 2b\cos 2\alpha = 0$$

$$(c-a)\operatorname{sen} 2\alpha + 2b\cos 2\alpha = 0$$

[da cui $\quad tg\, 2\alpha = \frac{2b}{a-c}$ $\qquad$ se $a - c = 0$
$tg\, 2\alpha = \infty$
$2\alpha = 90°$
$\alpha = 45°$]

dividendo ambo i membri per $\cos^2\alpha$ si ottiene:

$$(c-a)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + b\cos^2\alpha - b\operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

$$b\,tg^2\alpha - (c-a)\,tg\alpha - b = 0$$

per i valori α che risolvono questa eq. l'eq. della curva, nelle nuove coordinate diventa:

$$a'x'^2 + c'y'^2 + F = 0$$

Tenendo conto che I_1 e δ sono invarianti, si ottiene una relazione fra i coefficienti dell'eq. di partenza e quest'ultima trovata.

$$\begin{cases} a'c' = ac - b^2 \\ a'+c' = a+c \end{cases}$$

Trovata $tg\alpha$ si ricavano

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

Esempio - Scrivere in forma canonica l'eq.

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$$

Essendo

$$I_1 = a + c = 5 + 8 = 13 \qquad \delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 200 + 56 + 56 - 128 - 20 - 245 = -81$$

$I_1 \cdot \Delta = 13 \cdot (-81) < 0$ è una ellisse

Da $\begin{cases} 5x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 8y + 7 = 0 \end{cases}$ si ottiene

$$\begin{cases} 10x + 4y + 8 = 0 \\ -10x - 40y - 35 = 0 \end{cases}$$

$$// \quad -36y - 27 = 0 \qquad y = -\frac{27}{36} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} -20x - 8y - 16 = 0 \\ 2x + 8y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$-18x \quad // \quad -9 = 0 \qquad x = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$

Centro $\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{8} \\ y_0 = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Si opera la traslazione:

$$\begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$5\left(X^2 + \frac{1}{4} - X\right) + 4\left(XY - \frac{3}{4}X - \frac{1}{2}Y + \frac{3}{8}\right) + 8\left(Y^2 + \frac{9}{16} - \frac{3}{2}Y\right) + 8X - 4 +$$

$$+14y-\frac{21}{2}+5=0$$

$$5x^2+\frac{5}{4}-\cancel{5x}+4xy-\cancel{3x}-\cancel{2y}+\frac{3}{2}+8y^2+\frac{9}{2}-\cancel{12y}+\cancel{8x}$$
$$-4+\cancel{14y}-\frac{21}{2}+5=0$$

$$5x^2+4xy+8y^2-\frac{9}{4}=0$$

Compiamo ora una rotazione di un angolo α tale che

$$2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}=\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$$

I valori trovati per $\operatorname{tg}\alpha$ corrispondono a due direzioni fra loro perpendicolari, per cui prendendo $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$ si scambiano fra loro gli assi x e y

Per $\operatorname{tg}\alpha=2$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{\pm\sqrt{1+4}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}\qquad\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+4}}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

Prendendo i valori positivi, si hanno le formule di rotazione

$$\begin{cases}x=\frac{x'}{\sqrt5}-\frac{2y'}{\sqrt5}\\ y=\frac{2x'}{\sqrt5}+\frac{y'}{\sqrt5}\end{cases}$$

$$5\cdot\left(\frac{x'}{\sqrt5}-\frac{2y'}{\sqrt5}\right)^2+4\cdot\left(\frac{x'}{\sqrt5}-\frac{2y'}{\sqrt5}\right)\left(\frac{2x'}{\sqrt5}+\frac{y'}{\sqrt5}\right)+8\left(\frac{2x'}{\sqrt5}+\frac{y'}{\sqrt5}\right)^2-\frac{9}{4}=0$$

$$5\left(\frac{x'^2}{5}+\frac{4y'^2}{5}-\frac{4}{5}x'y'\right)+4\left(\frac{2x'^2}{5}+\frac{x'y'}{5}-\frac{4x'y'}{5}-\frac{2y'^2}{5}\right)+$$
$$+8\left(\frac{4x'^2}{5}+\frac{y'^2}{5}+\frac{4x'y'}{5}\right)-\frac{9}{4}=0$$

$$x'^2+4y'^2-\cancel{4x'y'}+\frac{8}{5}x'^2-\cancel{\frac{12}{5}x'y'}-\cancel{\frac{8}{5}y'^2}+\frac{32}{5}x'^2+\cancel{\frac{8}{5}y'^2}+\cancel{\frac{32}{5}x'y'}-\frac{9}{4}=0$$

$$9x'^2+4y'^2-\frac{9}{4}=0$$

$$\frac{9x'^2}{\frac{9}{4}}+\frac{4y'^2}{\frac{9}{4}}=1\qquad\frac{x'^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y'^2}{\frac{9}{16}}=1$$

Oppure:

$$\begin{cases}a'c'=ac-b^2\\ a'+c'=a+c\end{cases}\qquad\begin{cases}a'+c'=13\\ a'c'=36\end{cases}$$

sistema simmetrico $\quad t^2-13t+36=0$

$$t=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm5}{2}=\left\langle\begin{matrix}4\\9\end{matrix}\right.\qquad\begin{cases}a'=4\\c'=9\end{cases}\quad\begin{cases}a'=9\\c'=4\end{cases}$$

$$T=\frac{\Delta}{\delta}=-\frac{81}{36}=-\frac{9}{4}\qquad\text{da cui}$$

$$9x'^2+4y'^2-\frac{9}{4}=0$$