Esempio - Ridurre a forma canonica

$$5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+12=0$$

$I_1 = a+c = 10 \qquad \delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25-9 = 16$

$I_1 \cdot \Delta = 10 \cdot (-81) < 0$ ellisse

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = -1 \quad \text{ellisse immaginaria}$$

Esempio - L'equazione

$$5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+4=0$$

$(\delta = 9 > 0)$

si riduce a

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 0$$ che si riduce al solo punto $(0,0)$

Esempio -

$$3x^2+10xy+3y^2+16x+16y+16=0$$

$(\delta = -16 < 0)$ si riduce a $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{1} = 0$

che è una iperbole degenere nelle due rette

$x'-2y'=0 \qquad x'+2y'=0$

6- RIDUZIONE DELL'EQUAZIONE DI UNA CONICA NON A CENTRO ALLA SUA FORMA CANONICA

Se l'eq.

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

è tale che risulta

$$\delta = ac-b^2=0$$

la conica non ha centro, oppure ne ha infiniti

Si semplifica la sua equazione con una rotazione

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

dove l'angolo α si trova risolvendo

$$b\,tg^2\alpha - (c-a)\,tg\,\alpha - b = 0$$

Nelle nuove coordinate, l'equazione si riduce a:

$$aX^2+2DX+2EY+f=0 \qquad \text{con } A\neq 0$$

oppure a:

$$CY^2+2DX+2EY+f=0 \qquad \text{con } C\neq 0$$

Le ultime 2 equazioni possono essere ridotte, con una traslazione a: $Y'=kx'^2 \quad X'=hy'^2$

Esempio – Scrivere sotto forma canonica l'eq.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

Essendo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

la conica non è a centro

$$-\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0 \qquad \alpha = \pm\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

tramite le quali si ha:

$$2Y^2 - 8\sqrt{2}X + 2\sqrt{2}Y + 25 = 0$$

Con una traslazione si può scrivere:

$$Y^2 = 4\sqrt{2}X \qquad \text{parabola}$$

Esempio – Ridurre a forma canonica l'eq.

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \qquad \text{conica non a centro}$$

$$-2\operatorname{tg}^2\alpha - (1-4)\operatorname{tg}\alpha + 2 = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{+3 \pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{+3\pm 5}{4} = \begin{cases} +2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\pm\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} x = X\frac{1}{\sqrt{5}} - Y\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = X\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{Y}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

da cui

$$5Y'^2 - 2\sqrt{5}Y' - 3 = 0 \qquad 5\left(Y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4 = 0$$

posto $Y = Y' - \frac{\sqrt{5}}{5}$ si riduce a:

$5Y^2 - 4 = 0$ cioè l'equazione degenere in una coppia di rette parallele di eq.

$$\sqrt{5}Y - 2 = 0 \qquad \sqrt{5}Y + 2 = 0$$

METODO PRATICO PER RICONOSCERE LE CONICHE

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Se $\Delta = 0$ è degenere

Se $\Delta \neq 0$: $\delta > 0$ ellisse $\begin{cases} I_1 \cdot \Delta < 0 & \text{reale} \\ I_1 \cdot \Delta > 0 & \text{immaginaria} \end{cases}$

$\delta < 0$ iperbole

$\delta = 0$ parabola

$$C \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$$

Con una traslazione e poi una rotazione si trasforma in forma canonica se si tratta di ellisse e iperbole

Con la sola rotazione se si tratta di una parabola

POLARE DI UN PT. $P(x_P y_P)$ rispetto a una ellisse

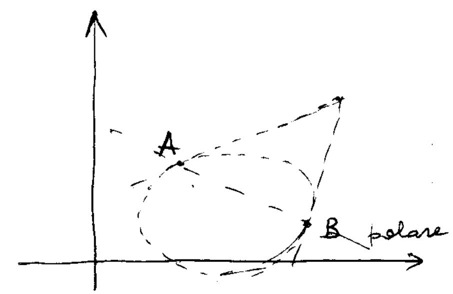
$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

eq. polare:

$$a x x_P + b y y_P + c\,\frac{x + x_0}{2} + d\,\frac{y + y_0}{2} + e = 0$$

A e B intersezioni tra polare ed ellisse

PA e PB tg all'ellisse da P



NB - Se $P \in$ all'ellisse la polare coincide con la tangente.

EQUAZIONE DELLA PARABOLA DI VERTICE $V(x_V, y_V)$

$y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$ con asse // asse y

se la parabola passa per $P(x_P, y_P)$

$y_P - y_V = a \cdot (x_P - x_V)^2$ e si ricava a

$x - x_V = a \cdot (y - y_V)^2$ con asse // asse x

se la parabola passa per $P(x_P, y_P)$

$x_P - x_V = a \cdot (y_P - y_V)^2$ e si ricava a