CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

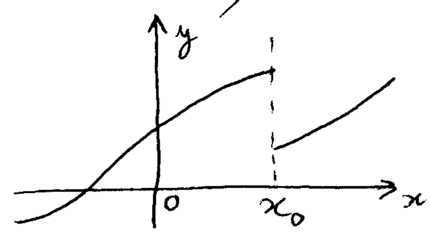
SI DICE CHE LA FUNZIONE $y = f(x)$ È CONTINUA NEL PUNTO x_0 SE:

a) ESISTE IL VALORE DI $f(x_0)$;
b) ESISTE IL LIMITE DI $f(x)$ PER x TENDENTE A x_0;
c) I DUE VALORI SONO UGUALI TRA DI LORO.

SE UNA SOLA DI QUESTE IPOTESI NON È SODDISFATTA, LA FUNZIONE SI DICE DISCONTINUA NEL PUNTO x_0. INVECE UNA FUNZIONE CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DI UN INTERVALLO I SI DICE CONTINUA NELL'INTERVALLO I.
L'INSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE SULL'INTERVALLO $[a;b]$ PRENDE IL NOME DI INSIEME $C^0[a;b]$.
UNA FUNZIONE HA I SEGUENTI, POSSIBILI TIPI DI DISCONTINUITÀ:

a) DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE O A SALTO. IL LIMITE SINISTRO IN QUESTO CASO È DIVERSO DAL LIMITE DESTRO: ESSI SONO ENTRAMBI FINITI, MA DIVERSI TRA DI LORO, COME A DESTRA.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



ESEMPIO 1: $y = \dfrac{1}{1 - e^{1/x}}$

IL C.E. È $x \neq 0$. SI HA:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 - e^{1/x}} = \frac{1}{1 - e^{1/0^-}} = \frac{1}{1 - e^{-\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - e^{1/x}} = \frac{1}{1 - e^{1/0^+}} = \frac{1}{1 - e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

IL SALTO È FINITO E VALE 1.

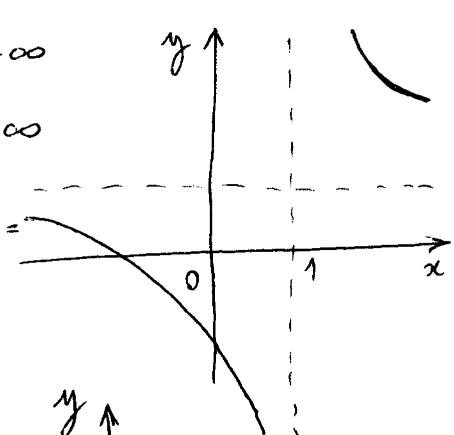
b) DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE O A SALTO INFINITO. IL LIMITE SINISTRO, O IL LIMITE DESTRO, O ENTRAMBI, SONO INFINITI O NON ESISTONO. NEL PRIMO CASO LA FUNZIONE PRESENTA UN ASINTOTO VERTICALE.

ESEMPIO 2: $y = \dfrac{x+2}{x-1}$

IL C.E. È $x \neq 1$, SI HA ALLORA:

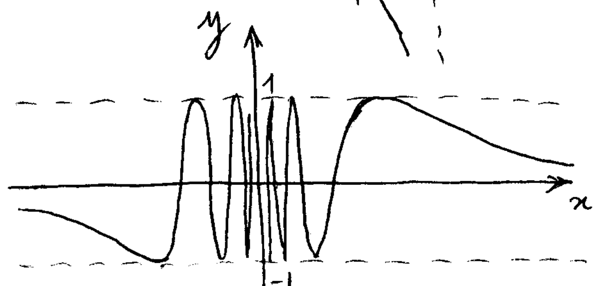
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{1^- - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{1^+ - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$



TALE FUNZIONE IN $x = 1$ PRESENTA UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE, CHE CORRISPONDE A UN ASINTOTO VERTICALE (SI TRATTA DI UNA FUNZIONE OMOGRAFICA)

ESEMPIO 3: $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$



IN $x = 0$ ESSA NON AMMETTE LIMITE NÉ DESTRO NÉ SINISTRO. INFATTI $1/x$ TENDE ALL'INFINITO, E IN UN INTORNO DI INFINITO LA FUNZIONE SENO NON È DEFINITA, CONTINUANDO A OSCILLARE TRA 0 E 1.

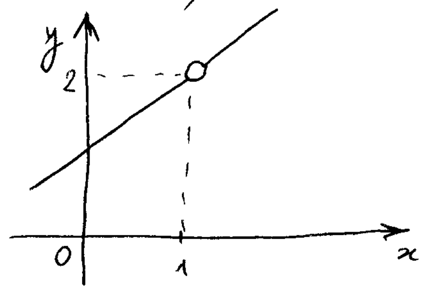
c) <u>DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE O ELIMINABILE</u>. IN QUESTO CASO IL PUNTO x_0 NON APPARTIENE AL DOMINIO, MA IL LIMITE IN QUEL PUNTO È FINITO.

<u>ESEMPIO 4</u>: $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ IL C.E. È $\mathbb{R} - \{1\}$.

SI HA:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

NE CONSEGUE CHE PER $x \neq 1$ LA FUNZIONE DATA COINCIDE CON LA RETTA DI EQUAZIONE $y = x+1$. PER $x = 1$ INVECE VI È UN PUNTO BIANCO, PERCHÉ TALE FUNZIONE NON È DEFINITA IN TALE PUNTO. LA DISCONTINUITÀ SI DICE <u>ELIMINABILE</u> PERCHÉ TALE PUNTO BIANCO PUÒ ESSERE "RIEMPITO", IMPONENDO CHE IN $x = 1$ LA FUNZIONE VALGA 2. LA DISCONTINUITÀ SI PUÒ ELIMINARE IN QUESTO MODO:



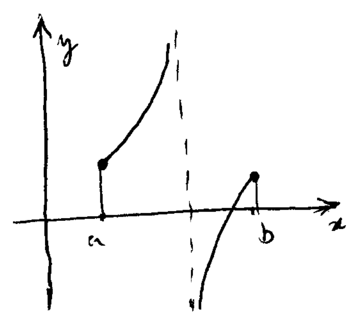
$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{SE } x \neq 1 \\ 2 & \text{SE } x = 1 \end{cases}$$

IN TAL MODO LA FUNZIONE È RESA CONTINUA.

PER LE FUNZIONI CONTINUE VALGONO I SEGUENTI TEOREMI:

<u>TEOREMA DI WEIERSTRAß</u>: SIA $f(x)$ CONTINUA SULL'INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a;b]$. TALE FUNZIONE ALLORA È DOTATA SU $[a;b]$ DI MASSIMO E DI MINIMO ASSOLUTO.

A MO' DI CONTROESEMPIO, SI OSSERVI LA FUNZIONE A DESTRA. ESSA NON È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DI $[a;b]$, AVENDO UN ASINTOTO VERTICALE E SI VEDE CHE ESSA NON HA NÉ MINIMO NÉ MASSIMO.



<u>TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI</u>: SIA $f(x)$ CONTINUA SU UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO. ALLORA ESSA ASSUME ALMENO UNA VOLTA TUTTI I VALORI COMPRESI TRA IL MINIMO ED IL MASSIMO.

<u>TEOREMA DEGLI ZERI</u>: SIA $f(x)$ CONTINUA SU UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a;b]$, CHE AGLI ESTREMI DI ESSO ASSUME VALORI DI SEGNO OPPOSTO. ALLORA ESISTE ALMENO UN PUNTO C, INTERNO ALL'INTERVALLO $(a;b)$, IN CUI $f(x)$ SI ANNULLA.

IN SIMBOLI:

$$f(x) \in C^0[a;b] \land f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b) \text{ t.c. } f(c) = 0$$

TUTTI E TRE I TEOREMI RAPPRESENTANO SOLO DELLE <u>CONDIZIONI SUFFICIENTI</u>. CIÒ SIGNIFICA CHE, SE LE IPOTESI SONO VERIFICATE, CIÒ È SUFFICIENTE PER AFFERMARE CHE LA TESI È VERA; MA LA TESI PUÒ ESSERE VERA ANCHE SE LE IPOTESI NON SONO VERIFICATE. LO SI VEDE NELL'ESEMPIO QUI A DESTRA: LA FUNZIONE $f(x)$ NON È CONTINUA SULL'INTERVALLO $[a;b]$, EPPURE È DOTATA LO STESSO, SU DI ESSO, DI MASSIMO E DI MINIMO. E LA STESSA COSA VALE PER GLI ALTRI TEOREMI.