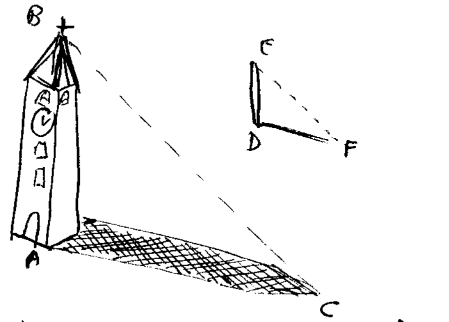
VALOR MEDIO, ERRORI E CURVA DI GAUSS

SUPPONIAMO DI VOLER EFFETTUARE UNA MISURA INDIRETTA PIUTTOSTO COMPLESSA, COME L'ALTEZZA DI UN CAMPANILE CON IL METODO DELL'OMBRA DI UN BASTONE (FIGURA A FIANCO). IN QUESTO CASO, ANCHE PICCOLI ERRORI ACCIDENTALI POSSONO PROVOCARE GRANDI VARIAZIONI NEI RISULTATI FINALI. SUPPONIAMO CHE QUESTA MISURAZIONE ABBIA FORNITO I 50 RISULTATI SEGUENTI (IN METRI):



I TRIANGOLI $\hat{ABC}$ E $\hat{DEF}$ SONO SIMILI, ESSENDO LA STESSA L'INCLINAZIONE DEL SOLE:

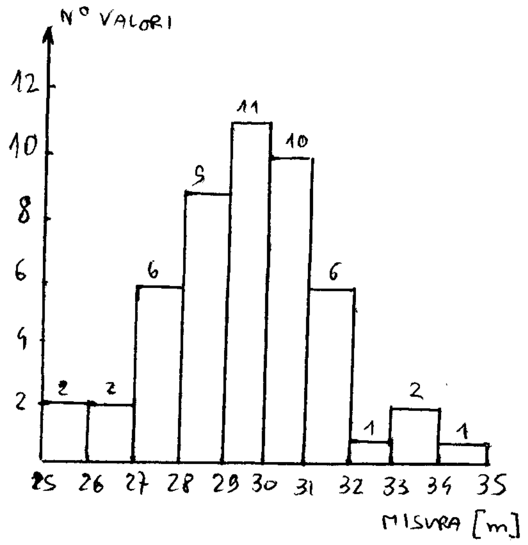
$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$$

27,54	31,86	30,35	27,96	29,88
28,49	29,26	27,73	28,41	34,77
28,10	31,52	30,87	28,69	31,11
30,82	29,99	27,24	27,52	29,11
31,51	29,40	28,58	28,88	25,16
30,16	28,50	31,62	31,67	29,49
30,99	29,50	26,08	30,55	29,85
25,10	33,53	30,42	29,05	28,61
32,53	28,80	30,78	29,39	30,91
26,91	33,22	27,83	30,85	29,44

LA MEDIA ARITMETICA DI n VALORI SI OTTIENE SOMMANDOLI TUTTI E DIVIDENDO IL RISULTATO PER n:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

COME SI VEDE, IL VALORE PIÙ PICCOLO È 25,10 m, MENTRE IL MASSIMO È 34,77 m, PERÒ I VALORI SPERIMENTALI NON SONO DISTRIBUITI IN MANIERA UNIFORME IN QUESTO INTERVALLO. DIVIDIAMO ALLORA QUESTI DATI IN GRUPPI. NEL PRIMO PONIAMO I VALORI COMPRESI TRA 25 E 26 m (25 INCLUSO, 26 ESCLUSO), NEL SECONDO I VALORI COMPRESI TRA 26 E 27, E COSÌ VIA, FINO ALL'ULTIMO DEI DIECI GRUPPI (TRA 34 E 35 m). AL PRIMO GRUPPO APPARTENGONO DUE VALORI, AL SECONDO ALTRI DUE, AL TERZO BEN SEI, AL QUARTO NOVE, E VIA DISCORRENDO. UN MODO MOLTO COMODO PER RAPPRESENTARE QUESTI GRUPPI CONSISTE NEL DISEGNARE UN GRAFICO CARTESIANO, CON GLI INTERVALLI DI MISURA IN ASCISSE E IL NUMERO DEI VALORI IN OGNI INTERVALLO IN ORDINATE. QUELLO CHE SI OTTIENE È UN ISTOGRAMMA, CIOÈ UN GRAFICO CHE RIPORTA IL NUMERO DI ELEMENTI IN OGNI GRUPPO SOTTO FORMA DI BARRE VERTICALI AFFIANCATE.



L'ISTOGRAMMA MOSTRA CHIARAMENTE COME LA MAGGIOR PARTE DELLE MISURE SIA COMPRESA TRA 27 E 32 METRI, MENTRE I VALORI SPERIMENTALI MAGGIORI DI 32 m E MINORI DI 27 m SONO MOLTO PIÙ RARI. INOLTRE QUESTI VALORI SONO DISPOSTI IN MODO PRESSOCHÉ SIMMETRICO RISPETTO ALLA ZONA CENTRALE. CIÒ SIGNIFICA CHE GLI ERRORI PER DIFETTO E QUELLI PER ECCESSO SI PRESENTANO CON LA STESSA PROBABILITÀ, E CHE QUINDI È CORRETTO CONSIDERARE VALORE PIÙ ATTENDIBILE IL VALORE MEDIO DI QUESTE MISURE, OTTENUTO PER MEZZO DELLA MEDIA ARITMETICA:

$$\overline{x} = \frac{27{,}53 + 31{,}86 + \cdots + 29{,}44}{50} = 29{,}61 \text{ m}$$

(→)

(→)

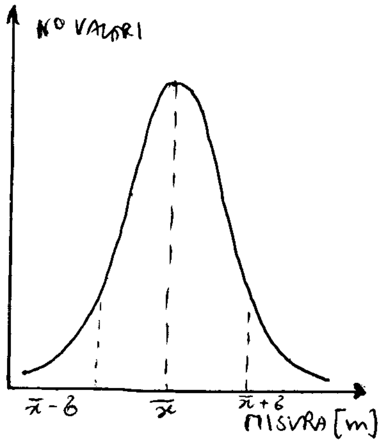
L'ERRORE DI QUESTA MISURA VIENE CALCOLATA COME SEMIDIFFERENZA TRA IL VALORE MASSIMO E IL MINIMO:

$$\varepsilon_a = \frac{34,77 - 25,10}{2} = 4,83\ m$$

PER CUI LA MISURA SARÀ ESPRESSA DA:

$$x = (29,61 \pm 4,83)\ m$$

QUANDO IL NUMERO DELLE MISURE DIVENTA GRANDISSIMO, PER CUI ANCHE IL NUMERO DEI GRUPPI IN CUI ESSE VENGONO DIVISE DIVENTA ENORME, TUTTE LE DISTRIBUZIONI SPERIMENTALI COME QUELLA IN ESAME TENDONO AD ASSUMERE LA STESSA FORMA, DATA DALLA <u>CURVA GAUSSIANA</u>, DAL NOME DEL MATEMATICO TEDESCO KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855). LA SOVRAPPOSIZIONE TRA IL NOSTRO ISTOGRAMMA E QUESTA CURVA È PRESSOCHÉ PERFETTA.



PER VALUTARE L'ERRORE SI POTREBBE ADOPERARE LA "SEMILARGHEZZA" DI QUESTA CURVA. MA COME VALUTARLA? UN'IDEA È QUELLA DI ADOPERARE LA <u>MEDIA DEGLI SCARTI</u> TRA I VALORI SPERIMENTALI E IL VALOR MEDIO. SICCOME PERÒ LA CURVA È SIMMETRICA, SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE QUESTA MEDIA DEGLI SCARTI È SEMPRE PARI A <u>ZERO</u>.

ALLORA SI RICORRE AD UN ARTIFICIO. SI CALCOLA LA MEDIA DEI QUADRATI DEGLI SCARTI E POI SE NE ESTRAE LA RADICE QUADRATA. IN ALTRE PAROLE, SI SOTTRAE IL VALOR MEDIO DA TUTTI I VALORI SPERIMENTALI, SI FA IL QUADRATO DI QUESTI VALORI, SE NE FA LA MEDIA (LI SI SOMMA E POI SI DIVIDE PER 50), QUINDI SI ESTRAE LA RADICE QUADRATA DEL RISULTATO:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(27,54-29,61)^2 + (31,86-29,61)^2 + (30,35-29,61)^2 + \ldots + (29,44-29,61)^2}{50}} =$$

$$= 1,97\ m$$

QUESTO VALORE SI DICE <u>SCARTO QUADRATICO MEDIO</u> DELLA NOSTRA DISTRIBUZIONE DI VALORI, E SI INDICA CON LA LETTERA σ. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE TRA $\bar{x}-\sigma$ E $\bar{x}+\sigma$ STA COMPRESO IL 68,3% DELLE MISURE POSSIBILI. UNA VALUTAZIONE PIÙ PRECISA DEL VALORE "VERO" DELL'ALTEZZA DEL CAMPANILE PREVEDE PERCIÒ DI USARE σ COME VALORE DELL'ERRORE:

$$x = (29,61 \pm 1,97)\ m$$

QUESTO PERÒ SIGNIFICA SOLO CHE VI È IL 68,3 % DI PROBABILITÀ CHE IL VALORE "VERO" DELLA MISURA SIA COMPRESO TRA $\bar{x}-\sigma = 29,61 - 1,97 = 27,64\ m$ E $\bar{x}+\sigma = 29,61 + 1,97 = 31,58\ m$.

ANALITICAMENTE LA FUNZIONE GAUSSIANA È ESPRESSA DALLA LEGGE:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

ESSENDO $\bar{x}$ IL VALOR MEDIO E σ LO SCARTO QUADRATICO MEDIO.