DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ

IL CONCETTO DI PROBABILITÀ FU ELABORATO IN MODO SISTEMATICO DA FERMAT (1601–1665) E PASCAL (1623–1662); SECONDO LA LEGGENDA, QUEST'ULTIMO SI OCCUPÒ DI PROBABILITÀ PER ACCONDISCENDERE ALLE RICHIESTE DI UN SUO AMICO, IL CAVALIERE DI MERÈ, ACCANITO GIOCATORE D'AZZARDO. I DUE FORMULARONO LA COSIDDETTA:

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITÀ – SI CHIAMA PROBABILITÀ p DI UN EVENTO ALEATORIO IL RAPPORTO TRA IL NUMERO DI CASI FAVOREVOLI E IL NUMERO DEI CASI POSSIBILI, NELL'IPOTESI CHE QUESTI SIANO EQUIPROBABILI.

$$p(A) = \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}}$$

LA PROBABILITÀ p DELL'EVENTO A È SEMPRE POSITIVA, ED È COMPRESA TRA 0 E 1. SE L'EVENTO È CERTO, CIOÈ SE NON HA CASI CONTRARI, LA SUA PROBABILITÀ È 1; SE È IMPOSSIBILE, CIOÈ SE NON HA CASI FAVOREVOLI, LA SUA PROBABILITÀ È 0. SE DUE EVENTI SONO TRA LORO INCOMPATIBILI, CIOÈ SE NON HANNO CASI FAVOREVOLI IN COMUNE (ES. L'USCITA DI UNA CARTA DI SPADE E DI UNA DI DANARI DA UN MAZZO), ALLORA LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO SOMMA, CIOÈ DELL'EVENTO RISULTANTE DAL VERIFICARSI DI ALMENO UNO DEI DUE EVENTI A E B, È PARI ALLA SOMMA DELLE LORO SINGOLE PROBABILITÀ:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO $\overline{A}$, OPPOSTO DI A ($\overline{A}$ SI VERIFICA QUANDO $\overline{A}$ NON SI VERIFICA), È PARI A $1 - p(A)$. INFATTI A E $\overline{A}$ SONO INCOMPATIBILI, MA LA LORO SOMMA È LA CERTEZZA, E QUINDI $p(A) + p(\overline{A}) = p(S) = 1$.

LA DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITÀ È STATA OGGETTO DI CRITICA PERCHÈ ESSA RICHIEDE A PRIORI CHE GLI EVENTI SIANO EQUIPROBABILI; MA ALLORA BISOGNA CONOSCERE LE PROBABILITÀ PRIMA DI CALCOLARLE, SENZA CONTARE IL FATTO CHE OGNI DADO O SIMILARI HA INEVITABILI IMPERFEZIONI, E CHE QUINDI GLI EVENTI NON SONO MAI EQUIPROBABILI. SONO STATE COSÌ FORMULATE ALTRE DEFINIZIONI DI PROBABILITÀ. ECCONE DUE:

DEFINIZIONE FREQUENTISTA DI PROBABILITÀ – SI DICE PROBABILITÀ LA FREQUENZA CON CUI UN EVENTO AVVIENE, CIOÈ IL RAPPORTO TRA IL NUMERO DEI CASI IN CUI L'EVENTO SI VERIFICA DIVISO IL NUMERO DELLE PROVE TOTALI, AL CRESCERE DEL NUMERO DELLE PROVE EFFETTUATE

DEFINIZIONE SOGGETTIVA DI PROBABILITÀ – SI DICE PROBABILITÀ DI UN EVENTO IL GRADO DI FIDUCIA CHE UN ESPERTO RIPONE NEL VERIFICARSI DI TALE EVENTO, INTENDENDOLO COME IL PREZZO CHE È DISPOSTO A PAGARE PER RICEVERE L'IMPORTO 1 SE L'EVENTO SI VERIFICA, E 0 SE NON SI VERIFICA.

LA PRIMA DEFINIZIONE SI BASA SULLA COSIDDETTA LEGGE EMPIRICA DEL CASO, FORMULATA PER LA PRIMA VOLTA DA JACQUES BERNOULLI (1654–1705): AL CRESCERE DEL NUMERO DI PROVE, LA FREQUENZA STATISTICA TENDE AL VALORE DELLA PROBABILITÀ CLASSICA. MENTRE PERÒ LA PROB. CLASSICA È DEFINITA A PRIORI, CIOÈ PRIMA DELLE PROVE, QUELLA STATISTICA È DEFINITA A POSTERIORI, CIOÈ DOPO

(⟶)

(⟶)

AVER RIPETUTO UN GRAN NUMERO DI PROVE. TUTTAVIA NON SEMPRE LE PROVE POSSONO ESSERE RIPETUTE MOLTISSIME VOLTE: BASTI PENSARE ALLE PARTITE DI UN CAMPIONATO EUROPEO DI BASKET. INOLTRE LA PROBABILITÀ DOVREBBE POTER ESSERE CALCOLATA ANCHE A PRIORI, O COMUNQUE INDIPENDENTEMENTE DALLO SVOLGERSI O MENO DI PROVE PRATICHE. ANCHE LA DEFINIZIONE SOGGETTIVA È STATA CRITICATA, PROPRIO PER LA SUA SOGGETTIVITÀ: DIVERSI BOOKMAKER POSSONO DARE VALUTAZIONI DIVERSE SULLO STESSO EVENTO SPORTIVO, PROPONENDO POSTE DIVERSE IN CAMBIO DELLO STESSO RISULTATO.

IL PROBLEMA È STATO PARZIALMENTE RISOLTO DAL MATEMATICO SOVIETICO ANDREJ KOLMOGOROV (1903–1987), IL QUALE HA PROPOSTO UNA *DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITÀ*. ESSA SI BASA SU QUESTI CONCETTI.

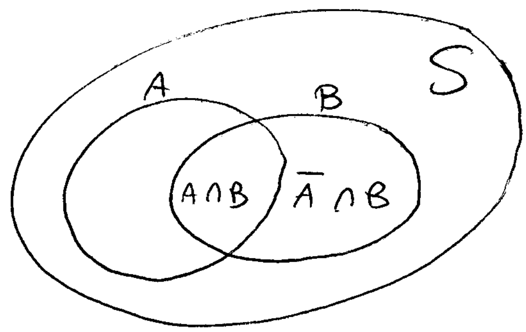
SIA DATO UN INSIEME S DI ELEMENTI DETTI *RISULTATI*; TALE SPAZIO SI DICE *SPAZIO DEGLI EVENTI*. OGNI SOTTOINSIEME DI S PRENDE IL NOME DI *EVENTO ALEATORIO*. AD OGNI EVENTO A È ASSOCIATO UN NUMERO REALE $p(A)$ TALE CHE $p(A) \geq 0$, $p(S) = 1$ E $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. IN TAL MODO LA TEORIA DELLA PROBABILITÀ RICEVE UNA FORMALIZZAZIONE DI TIPO INSIEMISTICO.

SICCOME $\emptyset \cup S = S$, E GLI INSIEMI $\emptyset$ E S SONO DISGIUNTI, NE CONSEGUE CHE $p(\emptyset) + p(S) = p(S)$, E QUINDI $p(\emptyset) = 0$. DATO UN QUALUNQUE EVENTO A, IL SUO COMPLEMENTARE $\bar{A}$ (CIOÈ L'EVENTO CONTRARIO) È TALE CHE $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$. INOLTRE, SIANO DATI DUE EVENTI QUALSIASI. SI HA:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

INFATTI GLI EVENTI $A \cup B$ E B POSSONO ESSERE SCRITTI COME SOMMA DI EVENTI INCOMPATIBILI (VEDI FIGURA):

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B), \quad B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$



MA ALLORA:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(\bar{A} \cap B)$$

E:

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

SOSTITUENDO LA PRIMA NELLA SECONDA ED ELIMINANDO $p(\bar{A} \cap B)$ DAI DUE MEMBRI, SEGUE PROPRIO CHE $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. SICCOME POI $p(A \cap B)$ NON PUÒ ESSERE NEGATIVA, SE NE RICAVA:

$$p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$$

KOLMOGOROV AFFERMA CHE LA PROBABILITÀ È UNA FUNZIONE NON NEGATIVA, NORMALIZZATA (PERCHÉ LA PROBABILITÀ DI TUTTO S È 1) E ADDITIVA. SE LO SPAZIO S CONTIENE SOLO EVENTI *ELEMENTARI* $a_1, a_2, \dots a_n$, ALLORA:

$$p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n) = p(S) = 1$$

SE TUTTI SONO EQUIPROBABILI, CIOÈ SE $p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_n)$, ALLORA LA PROBABILITÀ DI CIASCUNO DI ESSI È $1/n$, E SE A È UN EVENTO FORMATO DA m DEGLI n EVENTI ELEMENTARI, $p(A) = m/n$: CASI FAVOREVOLI DIVISO CASI POSSIBILI. RITROVIAMO COSÌ LA DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITÀ.