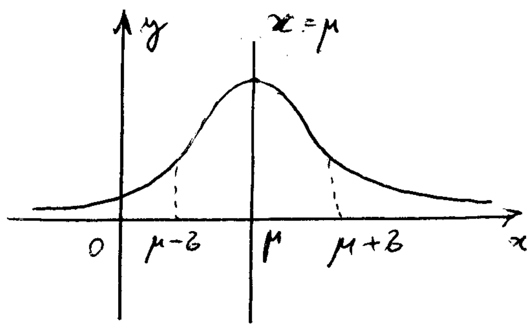
DISTRIBUZIONE NORMALE

SI DICE CHE UNA VARIABILE ALEATORIA CONTINUA HA UNA DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA SE LA SUA DENSITÀ DI PROBABILITÀ È DATA DALLA FUNZIONE:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

DOVE $E(X) = \mu$ E $V(X) = \sigma^2$. DI SOLITO SI SCRIVE $N(\mu, \sigma)$; TALE DISTRIBUZIONE PRENDE IL NOME DA CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855). IL GRAFICO DI TALE DISTRIBUZIONE, COME SI VEDE QUI A FIANCO, È SIMMETRICO RISPETTO ALLA RETTA DI EQUAZIONE $x = \mu$, PRESENTA UN MASSIMO IN $x = \mu$ E DUE FLESSI IN $x = \mu \pm \sigma$.



SE $\mu = 0$ E $\sigma = 1$, SI PARLA DI DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD. DI SOLITO, PER OTTENERE LA PROBABILITÀ IN UNA DISTRIBUZIONE DI TIPO GAUSSIANO, SI PASSA ATTRAVERSO LA DISTRIBUZIONE NORMALE.

$$f(x)_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE CASUALE NORMALE STANDARD, INDICATA CON Z, SI BASA SULLA SUA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE, INDICATA CON LA LETTERA Φ:

$$\Phi(z) = p(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

QUESTO INTEGRALE NON PUÒ ESSERE RISOLTO ALLE QUADRATURE, MA SOLO PER VIA NUMERICA; ESISTONO TABELLE CHE NE FORNISCONO I VALORI CON MOLTE CIFRE DECIMALI. DI SOLITO IN ESSA SONO CONTENUTI I SOLI VALORI POSITIVI DI Z; I VALORI NEGATIVI SI RICAVANO USANDO LA SIMMETRIA DELLA CURVA GAUSSIANA.

AD ESEMPIO:

$$p(Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}84134 = 84{,}134\%$$

$$p(0 < Z < 2) = p(Z < 2) - p(Z < 0) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(0) = 0{,}97725 - 0{,}5 = 0{,}47725 = 47{,}725\%$$

$$p(Z > 1) = 1 - p(Z < 1) = 1 - \Phi(1) =$$
$$= 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866 = 15{,}866\%$$

$$p(Z < -2) = p(Z > 2) = 1 - p(Z < 2) = 1 - \Phi(2) =$$
$$= 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275 = 2{,}275\%$$

$$p(Z > -1) = p(Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}84134 = 84{,}134\%$$

$$p(-1{,}5 < Z < -0{,}5) = p(0{,}5 < Z < 1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) =$$
$$= 0{,}93319 - 0{,}69146 = 0{,}24173 = 24{,}173\%$$

IN GENERALE, SI DEVE RICORDARE CHE:

$$p(Z < -z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 1 - p(Z < z)$$

E SE LA DISTRIBUZIONE NON È STANDARDIZZATA?

DATA UNA DISTRIBUZIONE NORMALE QUALSIASI $N(\mu, \sigma^2)$, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA VARIABILE CASUALE $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ È SICURAMENTE STANDARD. NE SEGUE CHE:

$$p(X \leq x) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

PROVIAMO A CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE X CADA NELL'INTERVALLO $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$. SI HA:

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = p(X < \mu+\sigma) - p(X < \mu-\sigma) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$
$$= \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 2\,\Phi(1) - 1 = 2(0{,}86433) - 1 = 0{,}68268$$

DUNQUE VI È IL 68,3% CHE I VALORI CADANO IN QUESTO INTERVALLO. ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA CHE VI È IL 95,4% DI PROBABILITÀ CHE X CADA TRA $\mu-2\sigma$ E $\mu+2\sigma$, E IL 99,7% CHE CADA TRA $\mu-3\sigma$ E $\mu+3\sigma$. NE CONSEGUE CHE QUASI TUTTA L'AREA SOTTESA DALLA GAUSSIANA È COMPRESA NELL'INTERVALLO $[\mu-3\sigma; \mu+3\sigma]$, PERCHÉ SOLO LO 0,27% È AL DI FUORI DI ESSA. PER QUESTO LE TAVOLE NON RIPORTANO MAI VALORI OLTRE IL 3 O IL 4.

LE VARIABILI CASUALI NORMALI DESCRIVONO UN GRAN NUMERO DI FENOMENI, IN CUI LA MAGGIOR PARTE DEI VALORI DI X SONO ADDENSATI INTORNO A UN VALOR MEDIO μ. NE È UN TIPICO ESEMPIO LA MISURA DI UNA GRANDEZZA FISICA CON UNO STRUMENTO DI MISURA, MA LO SONO ANCHE L'EFFETTIVA LUNGHEZZA DI UN OGGETTO PRODOTTO DA UNA MACCHINA A CONTROLLO NUMERICO (μ È IL VALORE IMPOSTATO SU DI ESSA), LA DISTRIBUZIONE DELLA STATURA, DEL PESO, DEL CONSUMO CALORICO GIORNALIERO, ETC. DI UNA CERTA POPOLAZIONE, I RISULTATI DI UN TEST UNIVERSITARIO O DI UN CONCORSO, E COSÌ VIA.

<u>ESEMPIO</u> — UN'AZIENDA PRODUCE BISCOTTI IN CONFEZIONI CHE DOVREBBERO TUTTE CONTENERNE 500 GRAMMI. IN BASE ALL'ANALISI STATISTICA SU CAMPIONI PRELEVATI A CASO, PERÒ, SI STIMA CHE IL PESO EFFETTIVO DELLE CONFEZIONI POSSA ESSERE TRATTATO COME UNA VARIABILE CASUALE NORMALE, CON MEDIA $\mu = 500$ E VARIANZA $\sigma^2 = 36$. LE SCATOLE VENGONO IMMESSE SUL MERCATO SOLO SE IL LORO PESO SI DISCOSTA MENO DEL 5% DAL VALORE MEDIO. QUANTE NE SARANNO SCARTATE?

IL 5% DI 500 GRAMMI EQUIVALE A 25 GRAMMI, QUINDI DEVO DETERMINARE LA PROBABILITÀ CHE LE SCATOLE ABBIANO PESO CORRETTO TRA $500-25=475$ E $500+25=525$ GRAMMI. STANDARDIZZIAMO LA VARIABILE. A $X=475$ CORRISPONDE IL NUOVO VALORE $Z = \dfrac{475-500}{36} = -0{,}69$, E A $X=525$ CORRISPONDE $Z = \dfrac{525-500}{36} = +0{,}69$

LA PROBABILITÀ CERCATA È DUNQUE PARI A:

$$P(X < 475 \vee X > 525) = P(Z < -0{,}69 \vee Z > +0{,}69) =$$
$$= P(Z > +0{,}69) + P(Z > +0{,}69) = 2[1-\Phi(0{,}69)] = 0{,}49018 = 49\%$$

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	**0,89251**	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

In ordinate: la parte intera e la prima cifra decimale. In ascisse: la seconda cifra decimale