

SI CHIAMA VARIABLE CASUALE O ALEATORIA UNA FUNZIONE CHE AD OGNI POSSIBILE ESITO DI UN ESPERIMENTO ALEATORIO ASSOCIA UN NUMERO REALE.

AD ESEMPIO, UNA VARIABLE CASUALE È QUELLA CHE ASSOCIA ALL'EVENTO "TE STA" (NEL LANCIO DI UNA MONETA) IL NUMERO DI TESTE USITE SU 1000 LANCI, OPPURE QUELLA CHE AD UNA PERSONA SCELTA A CASO IN UNA POPOLAZIONE ASSOCIA LA SUA ALTEZZA.

UNA VARIABLE CASUALE X CHE ASSUME UN NUMERO FINITO n DI VALORI SI DICE DISCRETA. DATA UNA VARIABLE CASUALE DISCRETA CHE ASSUME I VALORI x_1, x_2, \dots, x_n , A CIASCUNO DEGLI EVENTI $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ SI PUÒ ASSOCIARE LA RISPETTIVA PROBABILITÀ.

SI A DUNQUE X UNA VARIABLE CASUALE DISCRETA CHE ASSUME I VALORI x_1, x_2, \dots, x_n CON PROBABILITÀ RISPETTIVE p_1, p_2, \dots, p_n SI DICE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ (O DENSITÀ) DELLA VARIABLE CASUALE X LA FUNZIONE CHE ASSOCIA A CIASCUN x_i LA RISPETTIVA PROBABILITÀ p_i . SICCOME GLI EVENTI SONO DISGIUNTI E LA LORO UNIONE È LO SPAZIO CAMPIONARIO Ω , NE SEGUE CHE SARÀ SEMPRE $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

SIAMO AD ESEMPIO TRE MONETE. QUAL È LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DELLA VARIABLE CASUALE CHE ESPRIME IL NUMERO DI "TESTE" OTTENUTE? DEDIA T LA TESTA E C LA COCE, IO POSSO AVERE CCC (ZERO TESTE), TCC, CTC, CCT (UNA TESTA), TTC, TCT, CTT (DUE TESTE), TTT (TRE TESTE). SU OTTO CASI, UNO DA ZERO TESTE, TRE NE DANNO UNA, TRE NE DANNO DUE E UNA NE DA TRE, PER CUI LA FUNZIONE È DEL TIPO:

x_i	0	1	2	3
$p_i = X(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

E SI HA $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

SI CHIAMA MEDIA, O VALORE ATTESO, O SPERANZA MATEMATICA DELLA VARIABLE CASUALE X , E SI INDICA CON μ O CON $E(X)$, IL NUMERO:

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

NEL CASO PRECEDENTE SI HA:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1,5$$

SI DICE VARIANZA DI X , E LA SI INDICA CON σ^2 O CON $V(X)$, IL NUMERO:

$$V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n - \mu^2$$

NEL CASO SUDDETTO SI HA:

$$V(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} - (1,5)^2 = 3 - 2,25 = 0,75$$

LO SCARTO QUADRATICO MEDIO, O DEVIATIONE STANDARD DI X , INDICATO CON σ , È LA RADICE QUADRATA DELLA VARIANZA: $\sigma = \sqrt{0,75} = 0,87$

QUINDI POTREMO SCRIVERE: $\bar{X} = 1,50 \pm 0,87$

2/2

QUESTO PUO' ESSERE APPLICATO ALLA TEORIA DEI GIOCHI D'AZZARDI. INFATTI SI DICE EQUO UN GIOCO IN CUI, PER X LA VARIABILE CASUALE CHE RAPPRESENTA LA SOMMA COMPLESSIVA VINTA O PERSA DAL GIOCATORE AL TERMINE DI UNA PARTITA, SI HA $E(X) = 0$. SE $E(X) > 0$, IL GIOCO E' FAVOREVOLE AL GIOCATORE; SE $E(X) < 0$, QU E' SFAVOREVOLE.

FACCIAMO UN ESEMPIO. IO LANCO UN DADO, SE ESCE UN NUMERO DISPARI, DEVO PAGARE 2 EURO; SE ESCE 2, VINCO 5 EURO; SE ESCE 4, NON VINCO NE' PERDO NULLA; SE ESCE 6, VINCO 1 EURO. IL GIOCO E' EQUO?

X E' LA VARIABILE CASUALE CHE RAPPRESENTA LA SOMMA COMPLESSIVA VINTA O PERSA. SE ESCE UN NUMERO DISPARI, CIO' CHE HA PROBABILITA' $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, SI HA $X = -2$. SE ESCE 2 (PROBABILITA' $\frac{1}{6}$), $X = +5$. SE ESCE 4 (PROBABILITA' $\frac{1}{6}$), $X = 0$. SE ESCE 6 (PROBABILITA' $\frac{1}{6}$), $X = +1$. LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' E' ALLORA:

X	-2	0	1	5
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

IL VALORE MEDIO DI X E' :

$$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = -1 + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 0$$

SI TRATTA QUINDI DI UN GIOCO EQUO: GIOCANDO UN GRANDE NUMERO DI VOLTE, SI PUO' SUPPORRE CHE ALLA FINE MI TROVERO' NELLA CONDIZIONE INIZIALE, CIOE' NON AVRO' NE' GUADAGNATO NE' PERSO NULLA.

IL GIOCO DEL LOTTO E' EQUO? LA PROBABILITA' DI REALIZZARE UN AMBO SECCO E' $\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801}$ (DEI CINQUE NUMERI ESTRATTI AL LOTTO, DUE DEVONO ESSERE QUELLE DA ME SCELTI).

SE PUNTO 1 EURO SULL'USCITA DI UN CERTO AMBO, QUANTO DOVREBBE ESSERE LA VINCITA EQUA IN CASO DI VITTORIA?

SI A X LA SOMMA COMPLESSIVA. SE L'AMBO NON ESCE, PERDO UN EURO E QUINDI $X = -1$; SE ESCE, AVENDO PAGATO UN EURO PER LA PUNTATA, GUADAGNO UNA SOMMA S , E QUINDI LA VINCITA MEDIA E' $S - 1$ (HO TOLTO L'EURO DELLA PUNTATA). LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' E' PERCIO':

X	-1	$S - 1$
$p(X)$	$1 - \frac{2}{801} = \frac{799}{801}$	$\frac{2}{801}$

SE IL GIOCO E' EQUO, IL VALORE ATTESO DEVE ESSERE ZERO, QUINDI:

$$(-1) \cdot \frac{799}{801} + (S - 1) \cdot \frac{2}{801} = 0$$

DA CUI $S = 400,5$. L'INTESSA EQUA SAREBBE QUINDI DI 400,5 EURO. IMMETTE L'AMBO E' PAGATO SOLO 250 VOLTE LA PUNTA. CONCLUSIONE: CHI GIOCA AL LOTTO A LUNGO ANDARE E' SEMPRE IN PERDITA.