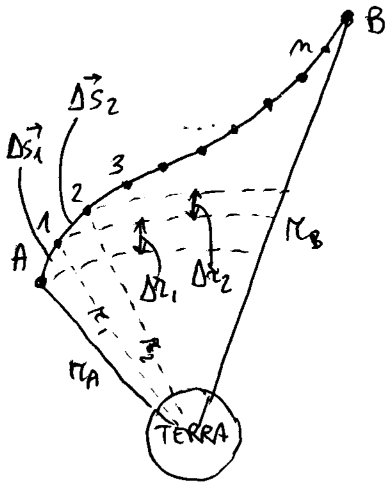
ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

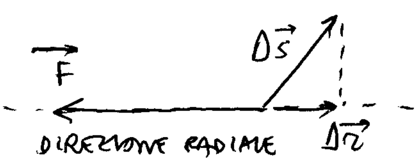
IL "CAMPO GRAVITAZIONALE IN PICCOLO" È CONSERVATIVO PERCHÉ IL LAVORO PER SALIRE NEL CAMPO DA h_A AD h_B È PARI A $L = mg\Delta h = mg(h_A - h_B) = U_A - U_B$, DOVE $U = mgh$ È DEFINITA COME ENERGIA POTENZIALE, IN MODO CHE IL LAVORO DIPENDE SOLO DAL PUNTO INIZIALE E DAL PUNTO FINALE. DIMOSTRIAMO CHE ANCHE IL "CAMPO GRAVITAZIONALE IN GRANDE" È CONSERVATIVO.



PER CALCOLARE IL LAVORO COMPIUTO CONTRO IL CAMPO GRAVITAZIONALE PER PORTARE LA MASSA m DA A A B (VEDI FIGURA) È PARI A $L = \vec{F_G} \cdot \vec{s}$; MA QUALE FORZA PER QUALE SPOSTAMENTO, DAL MOMENTO CHE, NEL CAMPO GRAVITAZIONALE IN GRANDE, LA FORZA DI GRAVITÀ CAMBIA DA PUNTO A PUNTO?

ALLO SCOPO, DIVIDIAMO IL PERCORSO $\overset{\frown}{AB}$ IN TANTI INTERVALLINI $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, COSÌ PICCOLI CHE OGNUNO DI ESSI PUÒ RAPPRESENTARE UN CAMPO GRAVITAZIONALE IN PICCOLO, CIOÈ CON FORZA DI GRAVITÀ $F_1, F_2, \dots, F_n$ PRESSOCHÉ COSTANTE. SI HA COSÌ:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta s_i} = \vec{F_1} \cdot \vec{\Delta s_1} + \vec{F_2} \cdot \vec{\Delta s_2} + \dots + \vec{F_n} \cdot \vec{\Delta s_n}$$



MA IL LAVORO È PARI AL PRODOTTO SCALARE TRA FORZA E SPOSTAMENTO, CIOÈ AL PRODOTTO DELLA FORZA PER LA COMPONENTE DELLO SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DELLA FORZA. MA LA FORZA È TUTTA RADIALE, PER CUI BASTA MOLTIPLICARE IL MODULO DELLA FORZA PER LO SPOSTAMENTO RADIALE (L'"INNALZAMENTO DI QUOTA") DEL PUNTO. SI HA COSÌ:

$$L = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta r_i = F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 + \dots + F_n \Delta r_n$$

MA $\Delta r_1 = r_1 - r_A$, $\Delta r_2 = r_2 - r_1$, ECCETERA, DOVE r_K È LA DISTANZA DEL PUNTO K DAL CENTRO DELLA TERRA. COME DISTANZA DALLA TERRA DI OGNI INTERVALLINO POSSIAMO ASSUMERE LA <u>MEDIA GEOMETRICA</u> $r = \sqrt{r_K r_{K+1}}$ DELLE DISTANZE DEI SUOI DUE ESTREMI, PER CUI:

$$L = G\frac{Mm}{(\sqrt{r_A r_1})^2}(r_1 - r_A) + G\frac{Mm}{(\sqrt{r_2 r_1})^2}(r_2 - r_1) + \dots + G\frac{Mm}{(\sqrt{r_n r_B})^2}(r_B - r_n)$$

MA $\dfrac{r_1 - r_A}{r_A r_1} = \dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_1}$ $(r_1 > r_A)$, E COSÌ VIA MUTATIS MUTANDIS, PER CUI, SE METTO IN EVIDENZA (GMm) TRA TUTTI I TERMINI HO:

$$L = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \cancel{\frac{1}{r_1}} + \cancel{\frac{1}{r_1}} - \cancel{\frac{1}{r_2}} + \cancel{\frac{1}{r_2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{r_n}} + \cancel{\frac{1}{r_n}} - \frac{1}{r_B}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

CIOÈ $L = \dfrac{GMm}{r_A} - \dfrac{GMm}{r_B}$. CHIAMANDO $\left(G\dfrac{Mm}{r}\right)$ <u>ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE</u> A DISTANZA r, HO CHE IL LAVORO DIPENDE SOLO DAL VALORE DELL'ENERGIA POTENZIALE NEL PUNTO INIZIALE E FINALE, CIOÈ ANCHE IL CAMPO GRAVITAZIONALE IN GRANDE È CONSERVATIVO. IL PROCEDIMENTO CHE HA PORTATO A RICAVARE L'ENERGIA POTENZIALE DALLA FORZA SI CHIAMA <u>INTEGRAZIONE</u>.