EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1) LINEARI

$$y' = y \cdot \varphi(x) + \psi(x)$$

$$y(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx} \cdot \left\{ C + \int \psi(x) \cdot e^{-\int \varphi(x)\,dx}\, dx \right\}$$

- l'equazione lineare non ha integrali di frontiera
- Vale in ogni caso il tc. di esistenza e unicità in grande

2) DI BERNOULLI

$$y' = y \cdot \varphi(x) + y^{\alpha} \cdot \psi(x) \qquad \text{con } \alpha \neq 0 \text{ e } \neq 1$$

$$y^{1-\alpha}(x) = e^{(1-\alpha)\int \varphi(x)\,dx} \left\{ C + (1-\alpha)\int \psi(x) \cdot e^{-(1-\alpha)\int \varphi(x)\,dx}\, dx \right\}$$

se α è positivo, va messa in evidenza la soluzione $y(x) = 0$ che è un integrale di frontiera se $0 < \alpha < 1$, è un integrale particolare se $1 < \alpha < +\infty$.

3) ESATTE

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{con } \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$$

l'integrale generale è

$$\int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy = C \qquad x_0 = y_0 = 0$$

$$\int_0^x X(x,y_0)\,dx + \int_0^y Y(x,y)\,dy = C$$

4) A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{dy}{Y(y)} = X(x)\,dx$$

Inoltre:
Se $Y(y) = 0$ le sue soluzioni sono integrali dell'eq. differenz.

5) OMOGENEE

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

posto $\frac{y}{x} = t$ $\qquad y = t \cdot x$

$$y' = t + t'x$$

$$t + t'x = f(t)$$

che diventa a variabili separabili

NB. Da $f(t) = 0$ possono derivare altri integrali soluzioni dell'eq.

6) FATTORE INTEGRANTE DEL TIPO $\mu(x)$ oppure $\mu(y)$

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{con } \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$$

(eq. differenziale non esatta)

Condizione per l'esistenza		Formule per i fattori integranti:
$\frac{X_y - Y_x}{Y} = \varphi(x)$ funzione solo di x	$\longrightarrow$	$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$
$\frac{Y_x - X_y}{X} = \psi(y)$ funzione solo di y	$\longrightarrow$	$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,dy}$

Moltiplicando poi l'eq. differenziale data per il fattore integrante, si ottiene una eq. differenziale esatta.

NB. Se le $\varphi(x)$ o le $\psi(y)$ risultano costanti, è possibile considerare tali costanti come funzioni di x o di y

7) DEL I° ORDINE IN FORMA NON NORMALE, RISOLTE RISPETTO A y

$$y = x^4 y'^2 - x y'$$

posto $y' = p$:

$$y = x^4 p^2 - x p$$

derivando rispetto a x

$$y' = 4x^3 p^2 - p + (2x^4 p - x)\frac{dp}{dx}$$

$$p = 4x^3 p^2 - p + (2x^4 p - x)\frac{dp}{dx}$$

$$4x^3 p^2 - 2p + x(2x^3 p - 1)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$2p(2x^3 p - 1) + x(2x^3 p - 1)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$(2x^3 p - 1)\left(2p + x \cdot \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

questa eq. è soddisfatta per $p = \frac{1}{2x^3}$ oppure se è $\frac{dp}{dx} = -2\frac{p}{x}$

Sostituendo $p = \frac{1}{2x^3}$ nell'eq. $y = x^4 p^2 - x p$ si trova

l'integrale $y = -\frac{1}{4x^2}$ dell'eq. data. Esso è singolare perché

posto $\varphi(x, y, y') = x^4 y'^2 - x y' - y$ risulta $\varphi_{y'} = 2x^4 y' - x = 0$

per $y' = \frac{1}{2x^3}$ ossia per $p = \frac{1}{2x^3}$ come prima.

Da $\frac{dp}{dx} = -2\frac{p}{x}$ la soluzione costante $p(x) = 0$ e integrando

$\log p = -2\log x + 2\log c$ cioè $p = \frac{c}{x^2}$. Sostituendo in

$y = x^4 p^2 - x p$, si ottiene in corrispondenza per l'eq. data

sia $y(x) = 0$ sia l'eq. dell'integrale generale $y = c^2 - \frac{c}{x}$

8) DI CLAIRAUT

$$y = xy' + \varphi(y')$$

L'integrale generale è la famiglia di rette $y = Cx + \varphi(C)$
Il rispettivo inviluppo è l'integrale singolare che si ottiene eliminando C fra la precedente e la sua derivata rispetto a C
$0 = x + \varphi'(C)$ (o, che è lo stesso, eliminando y' tra
$y = xy' + \varphi(y')$ e $0 = x + \varphi'(y')$)

9) DEL 2° ORDINE MANCANTI DELLA y

$$F(x, y', y'') = 0$$

ponendo $y' = p$ e $y'' = p'$ si ottiene una eq. a variabili separabili

10) DEL 2° ORDINE MANCANTI DELLA x

$$F(y, y', y'') = 0$$

è necessario ricercare gli eventuali integrali $y(x) = \text{costante}$

$$y' = p \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

Sostituendo nell'eq. data, si ottiene una eq. omogenea

11) DEL 2° ORDINE MANCANTI DELLA x e DELLA y

$$F(y', y'') = 0$$

Il più delle volte si risolve l'eq. come mancante della y, ma si può risolvere anche come mancante della x.