EQUAZIONI DIFFERENZIALI

SI CHIAMA <u>EQUAZIONE DIFFERENZIALE</u> UN' EQUAZIONE IN CUI L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE CHE COMPARE SOTTO SEGNO DI DERIVATA. AD ESEMPIO: SE IN UN SISTEMA FISICO LA VARIAZIONE DI UN CERTO PARAMETRO È PROPORZIONALE AL PARAMETRO STESSO E DI SEGNO OPPOSTO, PER TROVARE IL PARAMETRO OCCORRE RISOLVERE L'EQUAZIONE $f' = -kf$, CHE È APPUNTO UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

SI DICE <u>INTEGRALE GENERALE</u> DI UN' EQUAZIONE DIFFERENZIALE LA TOTALITÀ DELLE FUNZIONI CHE VERIFICANO L'EQUAZIONE. OGNI SINGOLA FUNZIONE INVECE PRENDE IL NOME DI <u>INTEGRALE PARTICOLARE</u>.
GLI INTEGRALI PARTICOLARI DI UN' EQUAZIONE DIFFERENZIALE SONO INFINITI.
LA RICERCA DI UN INTEGRALE PARTICOLARE CHE SODDISFA UNA DETERMINATA CONDIZIONE (AD ESEMPIO IL PASSAGGIO PER UN PUNTO) SI CHIAMA <u>PROBLEMA DI CAUCHY</u>. IL MASSIMO ORDINE DI DERIVAZIONE DI UN'EQ. DIFFERENZIALE SI CHIAMA <u>ORDINE</u> DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE. AD ESEMPIO $y''' = y^4 - y'$ È UN' EQ. DIFF. DEL TERZO ORDINE.

SI DICONO <u>EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI</u> QUELLE IN CUI LA DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE INCOGNITA PUÒ ESSERE SCRITTA COME PRODOTTO DI UNA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE INDIPENDENTE x E DI UNA FUNZIONE DELLA SOLA INCOGNITA y:

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$

ESSA SI PUÒ RISCRIVERE:

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot q(y)$$

ED ALLORA LE DUE VARIABILI SONO FISICAMENTE SEPARABILI:

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)\,dx$$

È POSSIBILE INTEGRARE LE DUE FUNZIONI SEPARATAMENTE. AD ESEMPIO:

$$y' = (y-2)x$$

PUÒ ESSERE RISCRITTA:

$$\frac{dy}{dx} = (y-2)x$$

E SEPARANDO LE VARIABILI:

$$\frac{dy}{y-2} = x\,dx$$

INTEGRO AMBI I MEMBRI:

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int x\,dx$$

DA CUI:

$$\ln|y-2| = \frac{x^2}{2} + C$$

CHE PUÒ ESSERE RISCRITTA:

$$y = 2 + e^{\frac{x^2}{2}+C} = 2 + Ke^{\frac{x^2}{2}}$$

SI DICONO EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI QUELLE CHE POSSONO ES= SERE SCRITTE NELLA FORMA:

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

ESSENDO $p(x)$ E $q(x)$ DUE FUNZIONI ASSEGNATE. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE PER RISOLVERLE BASTA USARE LA COSIDDETTA FORMULA DI LEIBNIZ:

$$y(x) = e^{\int p(x)\,dx} \cdot \int e^{-\int p(x)\,dx} \cdot q(x)\,dx$$

SIA AD ESEMPIO L'EQUAZIONE:

$$y' = -\frac{2y}{x} + 3x$$

ESSA È LINEARE, CON $p(x) = -\frac{2}{x}$ e $q(x) = 3x$. ALLORA:

$$y(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} \cdot \int e^{\int \frac{2}{x}dx} \cdot 3x\,dx = e^{-2\ln|x|} \cdot \int e^{2\ln|x|} \cdot 3x\,dx =$$

$$= e^{\ln(x^{-2})} \cdot \int e^{\ln(x^2)}\, 3x\,dx = \frac{1}{x^2} \cdot \int 3x^3\,dx = \frac{3}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + c\right) =$$

$$= \frac{3}{4}x^2 + \frac{3c}{x^2},$$ CHE SI PUÒ RISCRIVERE $\frac{3}{4}x^2 + \frac{c}{x^2}$.

SI DICONO EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFI= CIENTI COSTANTI LE EQUAZIONI DEL TIPO:

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

DOVE a, b, c SONO NUMERI REALI E $f(x)$ È UNA FUNZIONE ASSEGNATA.

SE $f(x) = 0$, SI PARLA DI EQUAZIONE OMOGENEA:

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

AD ESSA BISOGNA ASSOCIARE LA COSIDDETTA EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

DOVE λ È UNA VARIABILE REALE. I CASI POSSIBILI SONO TRE:

α) $\Delta > 0$. ALLORA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA DUE SOLUZIONI REALI E DI= STINTE λ_1 e λ_2. L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA È ALLORA:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

DOVE C_1 E C_2 SONO DUE COSTANTI DA DETERMINARE CON IL PROBLEMA DI CAUCHY.

β) $\Delta = 0$. ALLORA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA UNA SOLUZIONE DOPPIA E L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA È:

$$y(x) = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$$

γ) SE $\Delta<0$, ALLORA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA DUE SOLUZIONI COMPLESSE E CONIUGATE $\alpha \pm \beta i$. L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA È:

$$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)]$$

AD ESEMPIO, SIA L'EQUAZIONE: $y'' - 6y' + 13y = 0$

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$

DA CUI $\lambda = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$. DUNQUE SIAMO NEL CASO γ), CON $\alpha = 3$ E $\beta = 2$. L'INTEGRALE GENERALE PERCIÒ È:

$$y(x) = e^{3x}[C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)]$$

QUESTO PERÒ VALE PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI OMOGENEE. E PER QUELLE NON OMOGENEE? VALE IL SEGUENTE ASSUNTO: L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE COMPLETA SI OTTIENE SOMMANDO L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA E UN INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE COMPLETA.

COME TROVARE L'INTEGRALE PARTICOLARE? CERCANDO UNA FUNZIONE DELLO STESSO TIPO DEL TERMINE NOTO DELL'EQUAZIONE COMPLETA.

FACCIAMO UN ESEMPIO. SIA L'EQUAZIONE:

$$y'' - 4y' + 3y = x^2$$

L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$z'' - 4z' + 3z = 0$$

E L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

CHE DÀ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. L'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$z(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

DATO CHE IL TERMINE NOTO È x^2, CERCHIAMO ORA UN INTEGRALE PARTICOLARE DI TIPO POLINOMIALE:

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

DA CUI:

$$g'(x) = 2Ax + B, \quad g''(x) = 2A$$

SOSTITUISCO ORA NELL'EQUAZIONE COMPLETA:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

CIOÈ:

$$3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = x^2$$

PER IL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI DEVE ESSERE:

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ -8A + 3B = 0 \\ +2A - 4B + 3C = 0 \end{cases} \quad \text{DA CUI:} \quad \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 8/9 \\ C = 26/27 \end{cases}$$

QUINDI L'INTEGRALE PARTICOLARE DELLA COMPLETA È:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$$

E L'INTEGRALE GENERALE DELLA COMPLETA È:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$$

ANALOGAMENTE: SE IL TERMINE NOTO È DEL TIPO $f(x) = h e^{kx}$, SE K NON È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA ($K \neq \lambda$), SI CERCA UNA FUNZIONE DEL TIPO $g(x) = A e^{kx}$; SE K È SOLUZIONE n-PLA DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA, SI CERCA $g(x) = A x^n e^{kx}$.

SE IL TERMINE NOTO È DEL TIPO $f(x) = h \operatorname{sen} kx$ OPPURE $h \cos kx$, SE $\pm ik$ NON SONO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA, SI CERCA UNA FUNZIONE DEL TIPO $g(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$, ALTRIMENTI SE NE CERCA UNA DEL TIPO $g(x) = x^n (A \operatorname{sen} Kx + B \cos Kx)$.

FACCIAMO UN ESEMPIO. SIA DATA L'EQUAZIONE COMPLETA:

$$y'' + 4y' = \operatorname{sen} x$$

L'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$z + 4z' = 0$$

E L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È $\lambda^2 + 4\lambda = 0$. ESSA FORNISCE LE DUE SOLUZIONI $\lambda_1 = -4$ E $\lambda_2 = 0$. PERCIÒ L'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$z(x) = C_1 e^{-4x} + C_2$$

($e^{0x} = 1$). CERCHIAMO ORA UN INTEGRALE PARTICOLARE DELLA COMPLETA DEL TIPO:

$$g(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

PERCHÉ $K = 1$ NON È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA. SI HA:

$$g'(x) = -A \operatorname{sen} x + B \cos x$$
$$g''(x) = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$$

SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE COMPLETA:

$$-A \cos x - B \operatorname{sen} x - 4A \operatorname{sen} x + 4B \cos x = \operatorname{sen} x$$

CIOÈ:

$$(-B - 4A) \operatorname{sen} x + (-A + 4B) \cos x = \operatorname{sen} x$$

NE CONSEGUE:

$$\begin{cases} -B - 4A = 1 \\ -A + 4B = 0 \end{cases} \quad \text{DA CUI:} \quad \begin{array}{l} A = -4/17 \\ B = -1/17 \end{array}$$

PERCIÒ L'INTEGRALE PARTICOLARE CERCATO È $g(x) = -\frac{4}{17} \cos x - \frac{1}{17} \operatorname{sen} x$

E L'INTEGRALE GENERALE DELLA COMPLETA È:

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 - \frac{4}{17} \cos x - \frac{1}{17} \operatorname{sen} x$$