ERRORI SULLE MISURE INDIRETTE

SI SA CHE IN FISICA OGNI MISURA È AFFETTA DA UN ERRORE ASSOLUTO:

$$x = a \pm \varepsilon_a$$

L'ERRORE ASSOLUTO DA SOLO NON BASTA PER VALUTARE LA PRECISIONE DI UNA MISURA. INFATTI SI CONFRONTINO QUESTE DUE MISURE:

$$x = (5{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{cm} \qquad \text{E} \qquad y = (50{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{cm}$$

NEL PRIMO CASO L'ERRORE È UN CINQUANTESIMO DELLA MISURA, NEL SECONDO CASO UN CINQUECENTESIMO. ALLORA SI INTRODUCE L'ERRORE RELATIVO, DEFINITO COME IL RAPPORTO TRA L'ERRORE ASSOLUTO E LA MISURA:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{a} \qquad \text{NEL PRIMO CASO: } \varepsilon_r = \frac{0{,}1}{5{,}0} = 0{,}02 \qquad (2\ \%)$$

$$\text{NEL SECONDO CASO: } \varepsilon_r = \frac{0{,}1}{50{,}0} = 0{,}002 \qquad (0{,}2\ \%)$$

LA PRIMA MISURA È CERTAMENTE PIÙ PRECISA DELLA SECONDA.
PURTROPPO, QUANDO SI ESEGUONO OPERAZIONI, GLI ERRORI SI PROPAGANO.

a) SOMMA E DIFFERENZA DI MISURE

IN QUESTO CASO L'ERRORE ASSOLUTO DEL RISULTATO È LA SOMMA DEGLI ERRORI ASSOLUTI SUGLI ADDENDI.

SIANO $x = a \pm \Delta a$ E $y = b \pm \Delta b$.

ALLORA:

$$x + y = (a+b) \pm (\Delta a + \Delta b) \qquad \text{E:} \qquad x - y = (a-b) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

AD ESEMPIO: $x = (5{,}4 \pm 0{,}2)$ cm E $y = (3{,}2 \pm 0{,}1)$ cm

ALLORA: $x + y = (8{,}6 \pm 0{,}3)$ cm E $x - y = (2{,}2 \pm 0{,}3)$ cm

b) PRODOTTO DI MISURE

SIANO $x = a \pm \Delta a$ E $y = b + \Delta b$. IL LORO PRODOTTO VALE:

$$xy = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a + \Delta a \Delta b$$

$\Delta a \cdot \Delta b$ È TRASCURABILE RISPETTO AD $(a\Delta b)$ E A $(b\Delta a)$, (AD ES. SE Δa E Δb SONO DELL'ORDINE DELL'1%, $\Delta a \Delta b$ È DELL'ORDINE DELLO 0,01 %). DUNQUE ELIMINANDOLO, SI PUÒ SCRIVERE CIÒ CHE RESTA COME:

$$xy = ab \pm (a\Delta b + b\Delta a) = ab \pm \left(ab\frac{\Delta b}{b} + ab\frac{\Delta a}{a}\right) = ab \pm ab\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

ORA, $\frac{\Delta a}{a}$ È L'ERRORE RELATIVO SU a E $\frac{\Delta b}{b}$ È L'ERRORE RELATIVO SU b.

MOLTIPLICANDO LA LORO SOMMA PER IL PRODOTTO (ab) SI OTTIENE L'ERRORE ASSOLUTO SUL PRODOTTO, DUNQUE SE NE DEDUCE CHE $(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$ È UN'OTTIMA STIMA

(→)

(→)
DELL'ERRORE RELATIVO SUL PRODOTTO È LA SOMMA DEGLI ERRORI RELATIVI DEI DUE FATTORI:

$$\varepsilon_r(ab) = \varepsilon_r(a) + \varepsilon_r(b)$$

IN PRATICA BISOGNA TROVARE I DUE ERRORI RELATIVI, SOMMARLI E POI MOLTIPLICARE IL TUTTO PER IL PRODOTTO.

ESEMPIO. UN RETTANGOLO HA LATI $x = (3{,}4 \pm 0{,}2)$ cm ED $y = (2{,}8 \pm 0{,}2)$ cm
TROVARE L'ERRORE SULL'AREA. IL SUO VALORE ASSOLUTO È $3{,}4 \cdot 2{,}8 = 9{,}52\ \text{cm}^2$
GLI ERRORI RELATIVI MISURANO $\varepsilon_{rx} = \frac{0{,}2}{3{,}4} = 0{,}06$ ED $\varepsilon_{ry} = \frac{0{,}2}{2{,}8} = 0{,}07$. ALLORA L'ERRORE RELATIVO SULL'AREA È $\varepsilon_r(xy) = 0{,}06 + 0{,}07 = 0{,}13$.
TORNIAMO ALL'ERRORE ASSOLUTO: $\varepsilon_a(xy) = 9{,}52 \cdot 0{,}13 = 1{,}24\ \text{cm}^2$
E QUINDI $xy = (9{,}52 \pm 1{,}24)\ \text{cm}^2$.

c) RAPPORTO DI MISURE

CON UNA DIMOSTRAZIONE ANALOGA ALLA PRECEDENTE SI RICAVA CHE ANCHE L'ERRORE RELATIVO SUL RAPPORTO È PARI ALLA SOMMA DEGLI ERRORI RELATIVI DI NUMERATORE E DENOMINATORE.

$$\varepsilon_r\left(\frac{a}{b}\right) = \varepsilon_r(a) + \varepsilon_r(b)$$

ESEMPIO. UN PUNTO MATERIALE PERCORRE $\Delta s = (5{,}2 \pm 0{,}2)$ m $\Delta t = (3{,}4 \pm 0{,}1)$ s.
QUAL È L'ERRORE SULLA VELOCITÀ? IL SUO VALORE ASSOLUTO È $\frac{5{,}2}{3{,}4} = 1{,}53$ m/s.
GLI ERRORI RELATIVI MISURANO $\varepsilon_r(\Delta s) = \frac{0{,}2}{5{,}2} = 0{,}04$ E $\varepsilon_r(\Delta t) = \frac{0{,}1}{3{,}4} = 0{,}03$.
L'ERRORE RELATIVO SULLA VELOCITÀ È $\varepsilon_r(v) = 0{,}04 + 0{,}03 = 0{,}07$.
TORNIAMO ALL'ERRORE ASSOLUTO: $\varepsilon_a(v) = 1{,}53 \cdot 0{,}07 = 0{,}11$
E QUINDI $v = (1{,}53 \pm 0{,}11)$ m/s

d) POTENZA DI UNA MISURA

DATA $x = a \pm \Delta a$, BISOGNA TROVARE x^n. SICCOME TALE POTENZA È IL PRODOTTO n VOLTE DELLA MISURA PER SE STESSA, BISOGNERÀ SOMMARE n VOLTE L'ERRORE RELATIVO SU QUELLA MISURA, CIOÈ MOLTIPLICARE L'ERRORE RELATIVO PER n E POI RITORNARE ALL'ERRORE ASSOLUTO:

$$\varepsilon_r(x^n) = n \cdot \varepsilon_r(x)$$

e) RADICE DI UNA MISURA

DATA $x = a \pm \Delta a$, BISOGNA TROVARE $\sqrt[n]{x}$. DATO CHE LA RADICE RAPPRESENTA L'OPERAZIONE INVERSA DELLA POTENZA, BISOGNA DIVIDERE PER n L'ERRORE RELATIVO, E POI RITORNARE ALL'ERRORE ASSOLUTO:

$$\varepsilon_r(\sqrt[n]{x}) = \frac{\varepsilon_r(x)}{n}$$