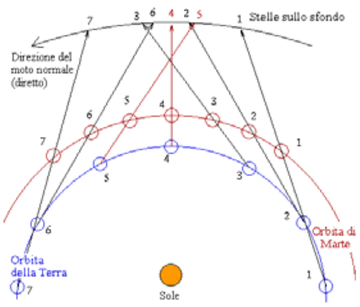
Gravitazione Universale

Liceo Ginnasio Statale *"S.M. Legnani"* – Anno Scolastico 2007/08
Classe *3B* Indirizzo Classico – Prof. *Roberto Squellati*[*]

1 Le leggi di Keplero

Osservando la posizione di Marte rispetto alle altre stelle, si nota che il suo moto è piuttosto complicato. Invece di muoversi lungo un semplice percorso curvo, mantenendo sempre il medesimo verso (come, ad esempio, fa il Sole nel cielo diurno con il suo sorgere e tramontare), di tanto in tanto cambia direzione di moto (ciò è noto come *moto retrogrado*). Dopo qualche mese cambia di nuovo direzione e riassume quella che aveva in precedenza.

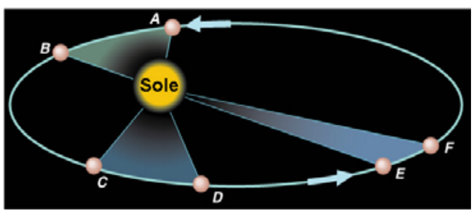


Anche gli altri pianeti del sistema solare mostrano lo stesso comportamento particolare; per inciso si noti che il termine *pianeta*, nell'etimologia greca, significa per l'appunto *errante*. L'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601) seguì le traiettorie dei pianeti, in particolar modo quella di Marte, per molti anni, registrandone la posizione sulla volta celeste con notevole precisione (si tenga infatti presente che le osservazioni astronomiche si effettuavano ad occhio nudo, perché il cannocchiale e il telescopio non erano ancora stati inventati). Giovanni Keplero (1571-1630) collaborò dal 1600 al lavoro di Brahe e, dopo la morte di quest'ultimo, proseguì le sue osservazioni astronomiche. Keplero fece buon uso del lavoro fatto da Brahe durante tutta la sua vita e, rielaborando i dati così diligentemente raccolti, giunse a formulare le tre leggi del moto planatario che oggi portano il suo nome.

Leggi di Keplero

1. *Ogni pianeta descrive attorno al Sole un'orbita ellittica in cui il Sole occupa uno dei fuochi.*

2. *Il* ***raggio vettore****, cioè il segmento congiungente la posizione del Sole e del pianeta nel descrivere l'orbita, descrive aree uguali in tempi uguali.*



[*]La parte di teoria è un'elaborazione personale dei contenuti relativi alla Gravitazione Universale trattati solitamente nella scuola secondaria superiore. Gli esercizi, invece, sono tratti da una raccolta del prof. Felice Guzzetti – il mio insegnante di fisica del liceo, a cui va il mio più sentito ringraziamento – che li ha pazientemente selezionati, adattati o inventati nel corso di tanti anni, reputandoli significativi per la loro originalità o per il loro impatto didattico. Le poche immagini presenti sono tratte da internet. Questi appunti hanno l'unico scopo di essere di ausilio agli studenti e non hanno alcun fine di lucro, né tantomeno vogliono ledere in alcun modo ai diritti d'autore. Per qualunque segnalazione (errori, sviste, imprecisioni, suggerimenti, segnalazione di violazione di Copyright, etc.) il mio recapito è il seguente: `roberto.squellati@tiscali.it`

In altri termini, si dice che la ***velocità areolare è costante****.*

3. *Il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'ellisse descritta è costante per tutti i pianeti. In termini matematici:*

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

Si osservi che k è costante per tutti i pianeti orbitanti attorno al Sole, **ma non ha lo stesso valore se si cambia il centro di attrazione gravitazionale**. In altri termine le leggi di Keplero valgono anche per tutti i corpi celesti orbitanti attorno a qualsiasi pianeta o stella, ma il valore costante del rapporto tra quadrato del periodo di rivoluzione e cubo del semiasse maggiore dell'orbita è diverso da pianeta a pianeta.

Dalle leggi di Keplero è possibile dedurre la legge di gravitazione universale; in letteratura fisica questo problema è noto come "problema inverso", essendo il "problema diretto" lo studio del moto (e la determinazione della forma delle orbite) per un punto soggetto all'attrazione gravitazionale.

2 Deduzione della legge di gravitazione universale

Denotiamo con m la massa della Terra e con M la massa del Sole. Prendiamo in considerazione l'attrazione gravitazionale sulla Terra ad opera del Sole e ipotizziamo che l'orbita sia circolare con raggio r. Per il secondo principio della dinamica (limitandoci a considerare il modulo della forza) abbiamo che

$$F = ma_c, \tag{1}$$

dove a_c indica l'accelerazione centripeta. Dalle relazioni cinematiche riguardanti il moto circolare uniforme sappiamo che

$$v = \omega r \qquad a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

dove T indica il periodo. La forza agente sulla Terra può quindi essere espressa nella forma

$$F = ma_c = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r. \tag{3}$$

avendo sostituito nella (1) le relazioni (2). Sapendo inoltre che vale la terza legge di Keplero, possiamo scriverla nella forma $T^2 = kr^3$, sostituendo quindi nella relazione (3) il periodo di rivoluzione al quadrato e ottenendo

$$F = m\,\frac{4\pi^2}{kr^2}.$$

Cambiamo ora punto di vista e ipotizziamo che sia la Terra ad essere immobile e che sia il Sole a orbitarle attorno. Denotiamo quindi con F' la forza di attrazione gravitazionale agente sul Sole ad opera della Terra. Con passaggi perfettamente analoghi a quelli appena svolti, possiamo ottenere l'analoga relazione

$$F' = M\,\frac{4\pi^2}{k_0 r^2}.$$

Si osservi che il valore di r è il medesimo in quanto la distanza tra il Sole e la Terra è la medesima, mentre è variata la costante prensente nella terza legge di Keplero, in quanto il centro attrattore gravitazionale è cambiato. Ora, *in forza del terzo principio della dinamica* (azione e reazione) si ha

$$F = F' \qquad \to \qquad m\,\frac{4\pi^2}{kr^2} = M\,\frac{4\pi^2}{k_0 r^2} \qquad \to \qquad \frac{m}{k} = \frac{M}{k_0} \qquad \to \qquad k_0 m = kM. \tag{4}$$

Prendiamo ora in considerazione, separatamente, le due espressioni delle forze F e F'. Modifichiamo quindi l'espressione formale di entrambe le forze senza tuttavia alterarne il valore, moltiplicando e dividendo la prima per la massa del Sole, la seconda per la massa della Terra:

$$F = m\,\frac{4\pi^2}{kr^2} = m\,\frac{4\pi^2}{kr^2}\cdot\frac{M}{M} = \frac{4\pi^2}{kM}\cdot\frac{mM}{r^2}, \qquad F' = M\,\frac{4\pi^2}{k_0 r^2} = M\,\frac{4\pi^2}{k_0 r^2}\cdot\frac{m}{m} = \frac{4\pi^2}{k_0 m}\cdot\frac{mM}{r^2}.$$

Ora, in forza della (4) possiamo porre

$$\frac{4\pi^2}{kM} = \frac{4\pi^2}{k_0 m} = G$$

e riscrivere quindi la prima della precedenti relazioni nel seguente modo:

$$\boxed{F = G\,\frac{mM}{r^2}}$$

Si osservi che a questo punto l'espressione di F e di F', che sappiamo essere uguali, non dipendono più dalle particolari costanti k o k_0 della terza legge di Keplero, ma da una costante unica, detta per l'appunto *costante di gravitazione universale*. La legge di gravitazione universale può essere quindi formulata nel seguente modo:

Legge 1 (Gravitazione Universale) *Il modulo della forza con cui interagiscono due corpi qualsiasi dotati di massa è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della reciproca distanza (o, più precisamente, dalla distanza tra i centri di massa dei due corpi). La direzione lungo cui agisce la forza è quella della* ***retta congiungente i centri di massa****. La forza gravitazionale* ***è sempre attrattiva****. La costante di gravitazione universale, indicata con G, esprime la proporzionalità tra le suddette grandezze ed è la medesima per qualsiasi coppia di corpi dotati di massa, ovunque si trovino nell'universo.*

Nel Sistema Internazionale

$$G = 6,67259 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2},$$

dimensionalmente $[G] = \left[l^3\right]\cdot\left[m^{-1}\right]\cdot\left[t^{-2}\right]$.

Osservazione 1 – Se una data massa è soggetta all'azione gravitazionale di un certo numero di altre masse, la forza risultante su di essa è semplicemente il vettore risultante dalla somma delle singole forze. Questa proprietà della forza di gravità è chiamata **principio di sovrapposizione**. La sovrapposizione implica, ad esempio, che la forza gravitazionale risultante che agisce sui nostri corpi in questo momento sia il vettore somma delle forze esercitate dalla Terra, dalla Luna, dal Sole e così via.

Osservazione 2 – La legge di gravitazione universale (o legge di Newton) solitamente è enunciata prendendo in considerazione corpi puntiformi. Ma come possiamo calcolare, allora, la forza gravitazionale per corpi estesi? Il metodo generale è quello di suddividere l'oggetto in un insieme di elementi di massa talmente piccola da potersi considerare puntiforme (al limite di massa infinitesima) e poi utilizzare il principio di sovrapposizione per calcolare la forza gravitazionale risultante (normalmente utilizzando il calcolo integrale). Per un oggetto di forma qualsiasi tale calcolo si presenta, solitamente, piuttosto difficile. Per un corpo uniforme di forma sferica il risultato finale è particolarmente semplice. Newton (che inventò anche il metodo per effettuare questi calcoli) dimostrò che la **forza risultante esercitata da una sfera su una massa puntiforme è la stessa che si avrebbe se tutta la massa della sfera fosse concentrata nel suo centro**. La stessa cosa accade se si considerano due corpi sferici. Tale risultato risulta quindi particolarmente importante perché ci permette di trattare i pianeti (e a maggior ragione gli oggetti di dimensioni ordinarie) come se fossero oggetti puntiformi, semplificando notevolmente i calcoli necessari per descriverne il moto.

Dedotta quindi le legge di gravitazione universale, passiamo ad applicarla per dedurre in modo immediato alcune relazioni interessanti. Si osservi che, per non appesantire la notazione, le successive relazioni riguardanti grandezze vettoriali – velocità, accelerazione, ... – verranno ricavate limitatamente ai moduli; direzione e verso saranno omesse, essendo immediatamente deducibili dalla legge di gravitazione universale o dalle informazioni elementari sulla traiettoria.

2.1 Accelerazione di gravità sulla superficie di un pianeta

Consideriamo un corpo di massa m_c che si trovi sulla superficie di un pianeta di raggio R (supponiamo, per fissare le idee, che il pianeta sia la Terra). La forza agente su tale corpo è stata espressa, nello studio della dinamica, come *forza peso*, quantificata come prodotto della massa del corpo per l'accelerazione di gravità: $P = m_c \cdot g$. Essendo tuttavia tale forza di natura gravitazionale, potrà parimenti essere scritta mediante la legge di gravitazione universale:

$$F = G\,\frac{m_c M}{R^2}$$

a patto di conoscere il raggio R e la massa M del pianeta. Tali differenti relazioni possono essere uguagliate, visto che esprimono la medesima forza

$$P = F \qquad \rightarrow \qquad m_c g = G\,\frac{m_c M}{R^2}.$$

Semplificando la massa del corpo a primo e a secondo membro otteniamo la relazione

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}} \tag{5}$$

che ci permette di calcolare l'accelerazione di gravità sulla superficie di un qualsiasi pianeta, noti il raggio e la massa. Tale relazione può essere immediatamente generalizzata ad una relazione che esprima la variazione dell'accelerazione di gravità (e conseguentemente della forza peso) al variare dell'altezza h dal suolo:

$$\boxed{g = \frac{GM}{(R+h)^2}}$$

2.2 Velocità orbitale di un satellite

Consideriamo un satellite di massa m_s che descriva un'orbita circolare attorno ad un pianeta avente raggio R e massa M. Supponiamo inoltre che il satellite si trovi ad un'altezza h rispetto al suolo. La permanenza in orbita è garantita dall'equibrio, in ogni punto della traiettoria, tra la forza centripeta (che in questo caso è l'attrazione gravitazionale del pianeta) e la forza centrifuga, dovuta al moto accelerato del sistema di riferimento solidale con il satellite stesso. La forza attrattiva vale quindi

$$F = G\,\frac{m_s M}{(R+h)^2}$$

mentre la forza centrifuga, in forza delle usuali relazioni per il moto circolare – vedi (2) – può essere espressa come

$$F_c = m_s a_c = m_s \omega^2 (R+h) = m_s\,\frac{v^2}{R+h}.$$

Uguagliando le precendenti relazioni

$$m_s\,\frac{GM}{(R+h)^2} = m_s\,\frac{v^2}{R+h}$$

da cui, semplificando la massa del satellite e i denominatori, si ricava

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}}$$

2.3 Energia potenziale gravitazionale nel caso generale

Nello studio della meccanica abbiamo introdotto l'espressione dell'*energia potenziale gravitazionale* (ossia quella forma di energia dipendente dalla posizione rispetto ad un livello di riferimento, solitamente il suolo) nella forma

$$U \equiv E_p = mgh$$

precisando tuttavia che tale relazione ha validità nell'ipotesi che g sia costante, ossia quando le altezze rispetto alla quota di riferimento sono molto inferiori rispetto alla misura del raggio del corpo che genera il campo gravitazionale più intenso (in simboli: $h \ll R$). In realtà, l'espressione generale dell'energia potenziale gravitazionale relativa ad un corpo di massa M (un pianeta ad esempio) ed un oggetto di massa m è la seguente

$$\boxed{E_p = -\frac{GmM}{r}} \tag{6}$$

dove r indica la distanza tra i centri di massa dei due oggetti considerati. Nel caso di un pianeta (che ha con ottima approssimazione una forma sferica) il centro di massa si trova nel centro della sfera, per cui per un oggetto ordinario di massa m (in generale con $m \ll M$) deve valere $r \geq R$. In questa sede non ci interessa prendere in esame in quale modo e sotto quali ipotesi si giunga all'espressione dell'energia potenziale gravitazionale (che richiede la conoscenza del calcolo integrale), tuttavia possiamo accennare a quale sia il significato del segno meno che compare nella sua espressione. Si osservi infatti che, avendo introdotto il segno meno, l'energia potenziale *cresce al crescere della distanza dal corpo* (sebbene il suo valore risulti negativo); l'energia potenziale quindi si annulla per $r \to \infty$, raggiungendo in questo modo il suo valore massimo. Tale convenzione sul segno ci sarà utile in seguito, per la determinazione della velocità di fuga da un pianeta o una stella.

A questo punto ci interessa mostrare come sia possibile ricondursi all'espressione $E_p = mgh$ se $h \ll R$. Calcoliamo il lavoro che compie la forza gravitazionale su un oggetto che cade sul suolo da un'altezza h esprimendolo come variazione di energia potenziale gravitazionale, espressa nella forma (6) – si ricordi infatti che vale il teorema di conservazione dell'energia, non essendo presente alcuna forza dissipativa. Otteniamo:

$$\mathcal{L} = \Delta E_p = -\frac{GmM}{R} + \frac{GmM}{R+h} = -GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = -GmM\left[\frac{(R+h)-R}{R\,(R+h)}\right].$$

Se vale l'ipotesi $h \ll R$, allora $R\,(R+h) \simeq R^2$. Inoltre, dalla relazione (5) sappiamo che

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad \to \qquad GM = gR^2$$

per cui, sostituendo $GM = gR^2$ nella relazione precedente si ottiene

$$\mathcal{L} = -mgR^2\,\frac{R+h-R}{R^2} = -mgR^2\,\frac{h}{R^2} = -mgh = -(mgh - mg\cdot 0)$$

che, a parte il segno, coincide con l'usuale espressione dell'energia potenziale gravitazionale.

2.4 Velocità di fuga

Come ultima applicazione dei concetti e delle relazioni testè introdotte, determiniamo la velocità da imprimere ad un oggetto in modo tale da "liberarlo definitivamente" dall'attrazione gravitazionale del pianeta (o della stella) da cui viene lanciato nello spazio. Tale velocità viene solitamente indicata come *velocità di fuga*.

Supponiamo che l'oggetto in questione abbia massa m e si trovi sulla superficie di un pianeta di raggio R e di massa M. Supponiamo inoltre che tale oggetto sia lanciato con una velocità di modulo v (non ha alcuna importanza la direzione con cui viene lanciato rispetto al suolo). Al momento del lancio tale oggetto avrà quindi un'energia totale pari a

$$E_i = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale. L'oggetto sarà completamente libero dall'effetto dell'attrazione gravitazionale del pianeta nel momento in cui sarà in grado di arrivare a una distanza infinita dal pianeta con velocità nulla. In altri termini la sua energia totale, alla fine del viaggio, dovrà essere

$$E_f = 0$$

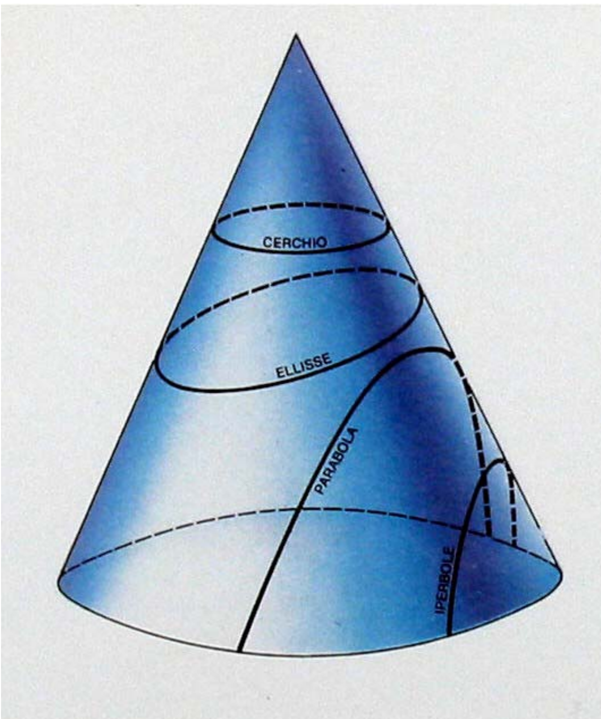
anche in questo caso somma di energia cinetica, nulla perché $v = 0$, ed energia potenziale gravitazionale, nulla proprio per l'introduzione del segno meno nella sua definizione (vedi § 2.3). Dal teorema di conservazione dell'energia si ottiene quindi

$$E_i = E_f \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{r}$$

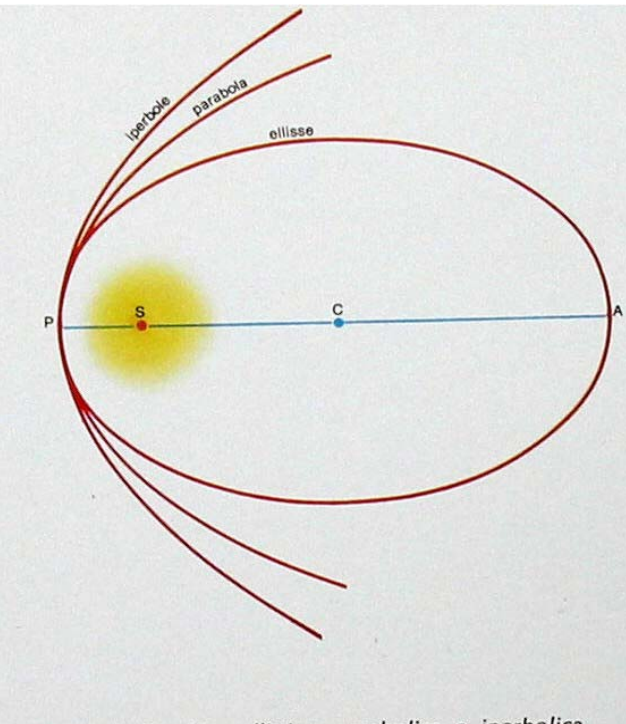
dove,nell'ultima uguaglianza, è possibile semplificare la massa dell'oggetto in quanto compare sia a primo sia a secondo membro. In questo modo è possibile ricavare

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

che per l'appunto esprime la *velocità di fuga*. Si osservi che se $v < v_f$ il corpo è destinato a tornare sul pianeta o, parimenti, è destinato a descrivere un'orbita ellittica attorno al pianeta: è il caso, ad esempio, di una cometa come quella di Halley, che non avendo velocità sufficiente per "liberarsi" dall'attrazione gravitazionele del Sole, torna periodicamente vicino alla nostra stella. Se $v = v_f$ il corpo ha energia esattamente sufficiente per allontanarsi definitivamente dal pianeta da cui viene lanciato, arrivando tuttavia a distanza infinita con velocità nulla; in questo caso è possibile dimostrare che la sua traiettoria è parabolica, con il pianeta occupante il fuoco della parabola. Infine, se $v > v_f$, il corpo si allontana definitivamente dal pianeta e giunge a distanza infinita con velocità *non nulla*, o equivalentemente con un "residuo" di energia cinetica; in questo caso la traiettoria è iperbolica e il pianeta occupa uno dei fuochi dell'iperbole. Per la Terra, a titolo di esempio, la velocità di fuga è pari a circa $11,2\,\mathrm{km/s}$.



Tutte le possibili specie di coniche si possono ottenere tagliando opportunamente un cono.



Esempi di orbita ellittica, parabolica e iperbolica attorno al Sole che ne occupa un fuoco.

3 Esercizi

1. Se la Terra avesse un raggio doppio di quello che ha e la stessa densità, la forza con cui attrae un corpo di quale fattore verrebbe alterata? [2]

2. Calcolare il valore dell'accelerazione di gravità sulla Luna sapendo che il rapporto tra il suo raggio e quello della Terra vale $0,273$ e il rapporto tra le rispettive masse vale $1/81,5$. [$g_L = 1,6\,\mathrm{m/s^2}$]

3. Se la Terra avesse un raggio quadruplo di quello che ha e una densità uguale alla metà di quella reale, la forza con cui attrae un corpo di quale fattore verrebbe alterata? [2]

4. Se la massa della Terra, quella della Luna e la distanza Terra-Luna raddoppiassero, quale sarebbe il nuovo periodo della Luna? ($T_{Luna} = 28$ giorni) [$T_* = 56$ giorni]

5. Qual è il periodo di un satellite che ruota attorno alla Terra su un'orbita di raggio pari a $1/4$ del raggio dell'orbita della Luna? Quale sarà il rapporto tra la velocità delle satellite e quella della Luna? Si considerino $T_{Luna} = 28$ giorni e $d_{\text{Terra-Luna}} = 384.000\,\mathrm{km}$. [$T = 3,5$ giorni, $r = 2$]

6. Trovare il periodo di rivoluzione attorno al Sole di un asteroide che si muove su un'orbita circolare compresa fra l'orbita di Marte e quella di Giove e tale che le raggio della sua orbita sia $4 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. [$T = 4,35$ anni]

7. Se la distanza Terra-Luna raddoppiasse, quale sarebbe il nuovo periodo della Luna? Quale sarebbe il rapporto tra la nuova velocità orbitale e la velocità orbitale reale della Luna? [$T_* \simeq 79$ giorni, $r \simeq 0,707$]

8. La velocità orbitale della Luna è $1,03\,\mathrm{km/s}$. Nel viaggiare con questa velocità per $3\,\mathrm{s}$, di quanto è "caduta" la Luna verso la Terra? Si confronti questo valore con la distanza percorsa in $3\,\mathrm{s}$ da un oggetto che cade in prossimità della Terra. Qual è il rapporto tra le tue distanze? Perché? [$h = 1,22\,\mathrm{cm}$, $\simeq 3.600$]

9. Di quando si dovrebbe salire al di sopra della superficie terrestre affinché l'accelerazione di gravità cambi del 10%? Di quanto si dovrebbe scendere sotto la superficie terrestre per osservare da stessa variazione? Si considerino noti raggio e massa della Terra. [$h \simeq 336\,\mathrm{km}$, $p \simeq 307\,\mathrm{km}$]

10. Sapendo che la distanza di Marte dal Sole è il 158% di quella della Terra dal Sole, si determina la durata dell'anno marziano. [$T \simeq 2$ anni]

11. La capsula Apollo è stata messa in orbita circolare attorno alla Luna a $110\,\mathrm{km}$ di altezza dalla sua superficie. Tenuto conto che l'accelerazione di gravità a quella quota è di $1,4\,\mathrm{m/s^2}$ e le raggio della Luna è $1740\,\mathrm{km}$, calcolare il periodo di rotazione della capsula. [$T \simeq 2\,\mathrm{h}$]

12. Sapendo che la distanza Terra-Luna è pari a 60 volte il raggio della Terra ($r_T = 6400\,\mathrm{km}$) e che la Luna compie una rotazione in $27,32$ giorni, calcolare la quota h rispetto alla superficie terrestre di un satellite artificiale avente il periodo di $12\,\mathrm{h}$. [$h = 20.270\,\mathrm{km}$]

13. Se la Terra, supposta sferica e omogenea, avesse il diametro pari a $1/5$ di quello reale e densità doppia, di quale fattore varierebbe la sua massa e l'accelerazione di gravità sulla sua superficie? [$2/125$, $2/5$]

14. Si consideri l'attrazione gravitazionale Terra-Luna e si determini a quale distanza dal centro della Luna deve trovarsi un corpo affinché l'attrazione terrestre sia rispettivamente uguale e quattro volte quella lunare. Grandezze note: $d_{\text{Terra-Luna}} = 384.000\,\mathrm{km}$, $m_{\text{Luna}} = 1,234\%\ m_{\text{Terra}}$. [$d_1 = 38.392\,\mathrm{km}$, $d_2 = 69.805\,\mathrm{km}$]

15. Un astronauta di massa $100\,\mathrm{kg}$ atterra su un pianeta che ha una massa e un raggio entrambi la metà di quelle terrestri. Quanto pesa su quel pianeta? [$P = 1960\,\mathrm{N}$]

16. Un satellite di massa $3000\,\mathrm{kg}$ descrive una traiettoria circolare di raggio $8500\,\mathrm{km}$. Trovare la sua energia cinetica, la sua energia potenziale e la sua energia totale. [$E_c = 7,06 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$, $E_p = -14,12 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$, $E_{tot} = -7,06 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$]

17. Se la Terra avesse un raggio quadruplo di quello che ha e la stessa densità, la velocità di fuga di quale fattore verrebbe alterata? [4]

18. Un razzo viene lanciato dalla Terra verso la Luna. Quando si trova a 345.000 km dalla Terra la sua accelerazione è nulla. Quale dovrà essere la minima velocità iniziale delle razzo per poter raggiungere tale punto e cadere sulla Luna per effetto dell'attrazione lunare? In tal caso con quale velocità il razzo colpirà la Luna? Il razzo ha una massa di 100 kg e si considerino noti i seguenti valori: $m_{\text{Terra}} = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $m_{\text{Luna}} = 7,3 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$, $r_{\text{Luna}} = 1800\,\text{km}$, $r_{\text{Terra}} = 6400\,\text{km}$, $d_{\text{Terra-Luna}} = 384000\,\text{km}$. [$v_1 = 1,1 \cdot 10^4\,\text{m/s}$, $v_2 = 2,27 \cdot 10^3\,\text{m/s}$]

19. Calcolare il lavoro che la forza gravitazionale esegue su un corpo di massa 1 kg quando viene allontanato dal suolo fino ad un'altezza pari al raggio terrestre. [$\mathcal{L} = -3,13 \cdot 10^7\,\text{J}$]

20. Determinare l'energia potenziale gravitazionale di 8 corpi ciascuno di massa m, posti nei vertici di un cubo di lato a. Si determini poi tale valore quando m è la massa della Terra e a è la distanza Terra-Sole. [$E_p = -3,65 \cdot 10^{51}\,\text{J}$]

4 Simulazione compito: problemi ed esercizi

In questa sezione è presentato un compito in classe, assegnato in una classe IV Liceo Scientifico, per quanto concerne la *sola* capacità nel risolvere problemi ed esercizi, non le conoscenze teoriche e lo studio. Il compito è da svolgere, con il solo ausilio di una calcolatrice scientifica, in un lasso di tempo pari a 60 min circa. Gli esercizi sono sostanzialmente presentati in ordine crescente di difficoltà.

1. Due palle da bowling di massa $6,5\,\text{kg}$ e raggio $0,11\,\text{m}$ sono in contatto l'una con l'altra. Qual è l'intensità della forza di *attrazione gravitazionale* tra le due palle? Si trascuri qualsiasi altra interazione gravitazionale.

2. Titan is the largest moon of Saturn, and the only moon in the solar system known to have a substantial atmosphere.
   (a) Find the *acceleration of gravity* on Titan's surface, given that its mass is $1,35 \cdot 10^{23}\,\text{kg}$ and its radius is $2.570\,\text{km}$.
   (b) Find the *escape speed* on Titan's surface.

3. L'accelerazione di gravità sulla supercie della Luna è circa $1/6$ dell'accelerazione di gravità terrestre. Dato che il raggio della luna è circa un $1/4$ del raggio terrestre, trovare la massa della Luna in funzione della massa della Terra.

4. Se la Terra avesse raggio doppio rispetto a quello reale e densità pari ad un terzo di quella effettiva, di quanto varierebbe l'accelerazione di gravità sulla sua superficie?

5. Un tipico satellite GPS (G*lobal* P*ositioning* S*ystem* – sistema di posizionamento globale) orbita a un'altitudine di $2 \cdot 10^{7}\,\text{m}$ rispetto al suolo. Trovare:
   (a) il *periodo orbitale*,
   (b) il modulo della *velocità orbitale*.

6. La cometa di Halley, che orbita intorno al Sole ($M_{\text{Sole}} = 1,989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$), descrive un'orbita ellittica. Quando è nel suo punto più vicino al Sole (*perielio*) è a una distanza di $8,823 \cdot 10^{10}\,\text{m}$ e si muove con una velocità di modulo $54,6\,\text{km/s}$. Il punto di maggiore distanza dal Sole (*afelio*) è $6,152 \cdot 10^{12}\,\text{m}$.
   (a) Il modulo della velocità della cometa di Halley è maggiore o minore di $54,6\,\text{km/s}$ quando è all'afelio? Giustificare la risposta.
   (b) Calcolare il modulo della sua velocità nell'afelio.

7. A quale raggio dovrebbe essere contratto il Sole per avere una velocità di fuga pari a quella delle luce e diventare quindi un *buco nero*? Si osservi che i buchi neri hanno velocità di fuga maggiore o uguale alla velocità della luce, per questo non vediamo alcuna emissione luminosa da parte loro.

8. Sulla Terra una persona può saltare verticalmente e salire in questo modo fino ad un'altezza h dal suolo. Qual è il *raggio* del più grande asteroide sferico da cui una persona può sfuggire saltando? Esprimere il risultato in funzione della densità dell'asteroide e dell'altezza a cui la persona può saltare (si assuma che l'asteroide abbia densità costante).