L'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Z}$

<u>Def.</u> Due insiemi A e B si dicono <u>equipotenti</u>, e si scrive $A \equiv B$, se esiste una relazione $\mathcal{R}$ tra gli elementi di A e quelli di B che risulti <u>biunivoca</u>.

Es. L'insieme degli uomini e quello delle loro carte d'identità sono tra loro equipotenti, giacché la corrispondenza tra di essi è biiettiva.
Si osservi che, in tal caso, gli elementi dell'uno si possono <u>identificare</u> con quelli dell'altro insieme. Infatti ogni uomo è perfettamente identificato dalla sua carta di identità.

La relazione di equipotenza è una relazione <u>di equivalenza</u>, infatti gode delle proprietà <u>riflessiva</u> (ogni insieme è equipotente a sé stesso), simmetrica (se $A \equiv B$ allora $B \equiv A$) e transitiva ($A \equiv B \wedge B \equiv C \rightarrow A \equiv C$).
Allora costruiamo tutte le classi di equivalenza che contengono ~~elementi~~ tra di loro equipotenti. Una contiene tutti gli insiemi equipotenti all'insieme vuoto, cioè tutti quelli <u>vuoti</u>; una contiene tutti gli insiemi con un <u>solo elemento</u>; una tutti quelli con due elementi; e così via. Il <u>principio di astrazione</u> mi permette di <u>astrarre</u> un nuovo concetto da queste classi di equivalenza; tale concetto altro non è che quello di... numero!

<u>Def.</u> Dicesi <u>numero naturale</u> ogni classe di equivalenza definita dalla relazione di equipotenza tra gli insiemi.

Allora si definirà <u>addizione</u> di numeri naturali l'operazione che associa ad ogni coppia di insiemi A e B (cui sono associati i numeri a e b) l'insieme $A \cup B$, e <u>moltiplicazione</u> il numero associato all'insieme $A \times B$.

Consideriamo ora la relazione tra i numeri naturali «la coppia di numeri (a, b) è equivalente alla coppia (c, d) se $a + d = b + c$».
Tale relazione è simmetrica. Infatti (a, b) è equivalente a sé stessa perché $a + b = b + a$. È riflessiva, perché $a + d = b + c$ implica che $c + b = d + a$.
E si verifica facilmente che è anche transitiva. Allora è una relazione di <u>equivalenza</u>, e permette di costruire un insieme quoziente formato da tutte le coppie (a, b) equivalenti secondo questa definizione.
Ora, le coppie così definite sono tali che $a + d = b + c \rightarrow a - c = b + d$.
Se $a > c$, la differenza è positiva per <u>tutte</u> le coppie; se $a = c$, è nulla; se $a < c$, è negativa. Ne segue che:

<u>Def.</u> Dicesi <u>numero relativo</u> ogni classe di equivalenza definita dalla relazione testé introdotta.

Dunque l'insieme quoziente della relazione di equipotenza coincide con l'insieme $\mathbb{N}$; quello della relazione successivamente introdotta coincide con l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri relativi. Analogamente si introduce $\mathbb{Q}$.