INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE CON $\Delta < 0$

SICURAMENTE UNO DEI TIPI DI INTEGRALI PIÙ DIFFICILI DA RISOLVERE PER GLI STUDENTI È QUELLO DELLE FRAZIONI ALGEBRICHE CON DENOMINATORE CHE HA $\Delta < 0$. UN METODO AGEVOLE DI SOLUZIONE È QUELLO CHE PASSA ATTRAVERSO ALCUNE FORMULE PRECONFEZIONATE:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{m}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+k)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+k) + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+k)^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+k}{m}\right) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\, dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

COME SI VEDE, SI PASSA SEMPRE ATTRAVERSO L'ARCOTANGENTE.

ESEMPIO 1.

$$\int \frac{dx}{4x^2+5} = \int \frac{dx}{4\left(x^2+\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2} = \frac{1}{\cancel{4}_{2}}\,\frac{\cancel{2}}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt5}\right) + C$$

IN QUESTO CASO SI RACCOGLIE IL 4 A DENOMINATORE, E SI RICADE NEL 2° DEGLI INTEGRALI SOPRA RICORDATI, CON $m^2 = \frac{5}{4}$ E QUINDI $m = \frac{\sqrt5}{2}$. IL RESTO È AUTOMATICO.

ESEMPIO 2.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt2}\right) + C$$

IL DENOMINATORE HA $\Delta < 0$. SI CONSIDERANO I PRIMI DUE TERMINI x^2+2x E CI SI CHIEDE: QUALE TERMINE OCCORRE, AL POSTO DI 3, PER OTTENERE UN QUADRATO PERFETTO? 1, QUINDI $x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+2$. SI RICADE COSÌ NEL 4° INTEGRALE CON $m^2 = 2$ E $K = 1$.

ESEMPIO 3.

$$\int \frac{x}{x^2+x+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+x+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+2\right) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

COME SI VEDE, TRAMITE I PRINCIPI DI EQUIVALENZA SI ROMPE L'INTEGRALE IN DUE PARTI, DELLE QUALI LA PRIMA È IMMEDIATA. LA SECONDA SI RISOLVE COMPLETANDO IL QUADRATO COSÌ: $x^2+x+\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+2} = \int \frac{dx}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt7}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt7/2}\right) + C$$

E QUINDI: $$\int \frac{x}{x^2+x+2}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+2\right) - \frac{1}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt7}\right) + C$$