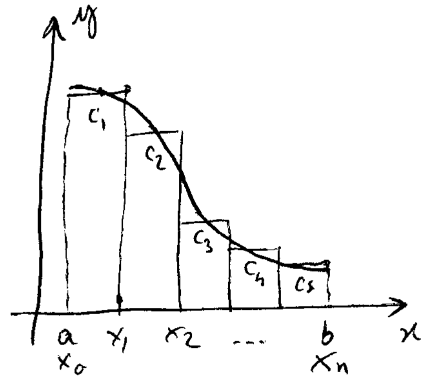
INTEGRAZIONE NUMERICA

ESISTONO FUNZIONI LA CUI PRIMITIVA NON È UNA FUNZIONE ELEMENTARE. AD ESEMPIO, NON VI È ALCUNA FUNZIONE ELEMENTARE LA CUI PRIMITIVA È PARI A $y = e^{-x^2}$. NE SEGUE CHE L'INTEGRALE PUÒ VENIRE CALCOLATO SOLO IN MANIERA APPROSSIMATA, MEDIANTE METODI NUMERICI. VEDIAMONE ALCUNI. SIA AD ESEMPIO DA CALCOLARE:

$$\int_1^3 e^{-x^2}\, dx$$

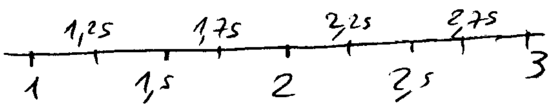


1) METODO DEI RETTANGOLI - DIVIDO L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE $[a; b]$ IN n INTERVALLINI DI AMPIEZZA $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. GLI ESTREMI DEGLI INTERVALLINI SONO $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$ E COSÌ VIA, FINO A $x_n = b$. APPROSSIMO ALLORA L'AREA DA DETERMINARE CON QUELLA DEGLI n RETTANGOLINI DI BASE Δx E ALTEZZA $f(c_k)$, DOVE c_k È IL PUNTO MEDIO DI $[x_{k-1}; x_k]$. LA FORMULA APPROSSIMATA VALE ALLORA:

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \Delta x \left[f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n) \right]$$

DOVE $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ E $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$

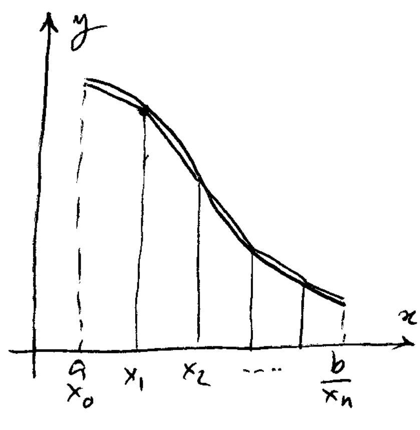
AD ESEMPIO, NEL NOSTRO CASO È $f(x) = e^{-x^2}$. DIVIDIAMO IL TRAPEZOIDE IN CINQUE PARTI $(n = 4)$. ALLORA $\Delta x = \frac{3-1}{4} = 0{,}5$, E QUINDI AVREMO $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2{,}5$ E $x_4 = 3$, MENTRE $c_1 = 1{,}25$; $c_2 = 1{,}75$; $c_3 = 2{,}25$ E $c_4 = 2{,}75$:



ALLORA AVREMO:

$$\int_1^3 e^{-x^2}\, dx \simeq 0{,}5 \left[f(1{,}25) + f(1{,}75) + f(2{,}25) + f(2{,}75) \right] =$$

$$= 0{,}5 \left[e^{-(1{,}25)^2} + e^{-(1{,}75)^2} + e^{-(2{,}25)^2} + e^{-(2{,}75)^2} \right] \simeq 0{,}13$$



2) METODO DEI TRAPEZI - SICCOME LO SCALOIDE DIFFERISCE IN MODO ACCENTUATO DAL TRAPEZOIDE, ANZICHÉ DEI RETTANGOLI POSSO USARE DEI TRAPEZI CHE HANNO Δx COME ALTEZZE E I VALORI $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ COME BASI. AD ESEMPIO IL TRAPEZIO AVENTE COME ALTEZZA $[x_{k-1}; x_k]$ E ALTEZZA Δx AVRÀ AREA: $\frac{1}{2} \Delta x \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right]$

E SOMMANDO LE AREE DI TUTTI I TRAPEZI OTTENIAMO:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_1)+f(x_2)] + \dots + \frac{1}{2}(f(x_n)-f(x_{n-1})) =$$

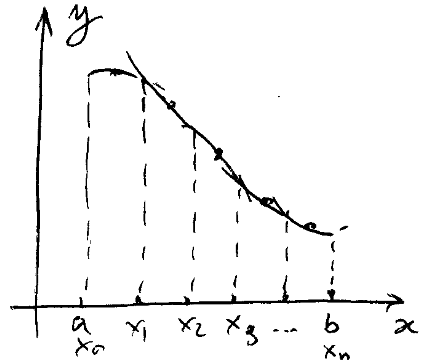
$$= \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+f(x_n)]$$

UTILIZZIAMO LA FORMULA TESTÉ SCRITTA PER IL CALCOLO APPROSSIMATO DEL NOSTRO INTEGRALE; AVREMO:

$$\int_1^3 e^{-x^2}\,dx \cong \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{4}\right)[f(1)+2f(1{,}5)+2f(2)+2f(2{,}5)+f(3)] =$$

$$= 0{,}25\left[e^{-1^2}+2e^{-(1{,}5)^2}+2e^{-(2)^2}+2e^{-(2{,}5)^2}+e^{-(3)^2}\right] \cong 0{,}15$$

3) METODO DELLE PARABOLE - È IL PIÙ PRECISO, E CONSISTE NELL'APPROSSIMARE L'ARCO CONSIDERATO CON ARCHI DI PARABOLA. PRENDIAMO I SOLITI PUNTI $a=x_0, x_1, x_2, \dots, b=x_n$ E CONSIDERIAMO QUESTA VOLTA GLI INTERVALLI PARI $[x_0;x_2]$, $[x_2;x_4]$, ..., $[x_{n-2};x_n]$, CHE HANNO COME PUNTI MEDI I VALORI $x_1, x_3, \dots, x_{n-1}$. ALLORA L'AREA DEL TRAPEZOIDE PUÒ ESSERE APPROSSIMATA CON QUELLA DEI TRAPEZOIDI INDIVIDUATI DAGLI ARCHI DI PARABOLA PASSANTI PER LE TERNE DI PUNTI (x_0, x_1, x_2); (x_2, x_3, x_4); ECCETERA. SI PUÒ ALLORA DIMOSTRARE CHE:



$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{3}\{[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+\dots+[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]\} =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

DOVE n È PARI, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. RICALCOLIAMO CON QUESTO METODO, PIÙ COMPLICATO MA PIÙ PRECISO IL SOLITO INTEGRALE DEFINITO CHE STIAMO CALCOLANDO CON DIVERSI METODI. AVREMO STAVOLTA:

$$\int_1^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot 0{,}5\cdot\{f(1)+4f(1{,}5)+2f(2)+4f(2{,}5)+f(3)\} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0{,}5\cdot\left[e^{-(1)^2}+4e^{-(1{,}5)^2}+2e^{-(2)^2}+4e^{-(2{,}5)^2}+e^{-(3)^2}\right\} =$$

$$\cong 0{,}14$$

NATURALMENTE MAGGIORE È n, MINORE È L'ERRORE COMMESSO NELL'APPROSSIMAZIONE DELL'INTEGRALE.