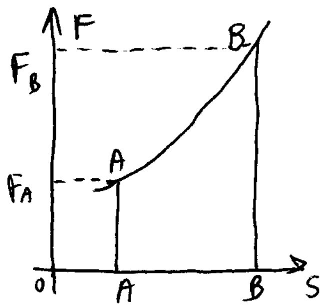
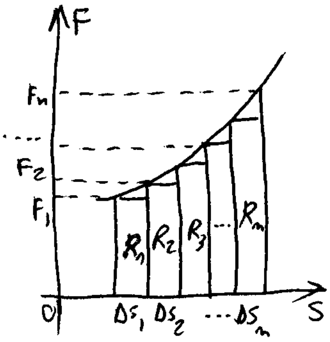
LAVORO DI UNA FORZA VARIABILE

È noto che il lavoro di una forza si calcola in base alla nota formula $L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha$; ciò però vale se la forza è costante lungo tutto lo spostamento s. E se non lo è, cioè se la forza varia con lo spostamento come in figura, cosa moltiplico per cosa?



Allora scompongo lo spostamento s in tantissimi intervallini Δs, tutti uguali tra loro ma piccolissimi, tanto piccoli che su di essi la forza si può ritenere costante. Nel primo intervallino Δs_1, la forza è allora quasi costante e vale F_1, per cui il lavoro si può calcolare ed è pari a $L_1 = F_1 \cdot \Delta s_1$. Nel secondo intervallino Δs_2, la forza è praticamente costante e pari ad F_2, per cui il lavoro è pari a $L_2 = F_2 \cdot \Delta s_2$. E così via per tutti gli n intervallini. Il lavoro totale è la somma di tutti questi contributi, per cui si ha:

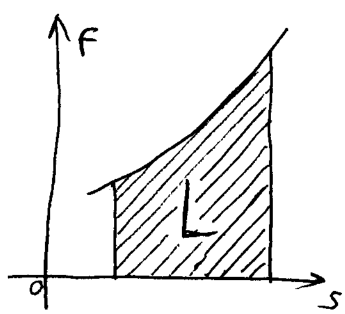


$$L_{tot} = L_1 + L_2 + \dots + L_n = F_1\Delta s_1 + F_2 \Delta s_2 + \dots + F_n \Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} F_k \Delta s_k$$

(La Σ si legge sigma e vale per "sommatoria per k che va da 1 ad n".

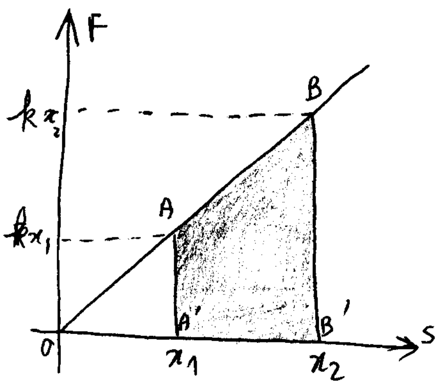
Notiamo che $(F_1 \cdot \Delta s_1)$ è pari all'area del rettangolino R_1 in figura, $(F_2 \cdot \Delta s_2)$ è l'area del rettangolino R_2. La somma delle aree di tutti i rettangolini è pari all'area della figura inscritta sotto la curva e detta scaloide.

Se n tende all'infinito, lo scaloide si avvicina sempre di più all'area della figura sottesa dalla curva. Se ne conclude che l'area sottesa dal grafico della forza in funzione dello spostamento è pari al lavoro della forza stessa. Tale procedimento si chiama integrazione grafica, e si dice che « il lavoro è l'integrale della forza sullo spostamento ».



Un esempio è fornito dalla forza elastica, che cambia con lo spostamento in base alla nota legge di Hooke: $\vec{F} = -K\vec{s}$

Scritta in termini scalari, diventa $F = Ks$. Se la rappresento nel diagramma F – s in figura, salta fuori una retta come in figura. Il lavoro necessario per allungare la molla da x_1 a x_2 è allora dato dall'area sottesa dal trapezio ABB'A':

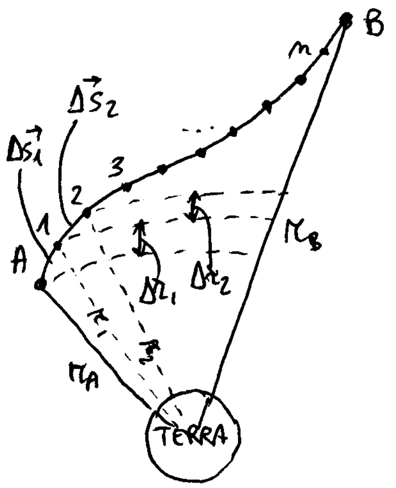


$$L = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(kx_1 + kx_2)}{2} = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

cioè $L = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$. Ne consegue che il lavoro della forza elastica dipende solo dalla posizione iniziale e finale della molla, e quindi la forza elastica è conservativa e posso introdurre l'en. potenziale elastica $U = \frac{1}{2}kx^2$.

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

IL "CAMPO GRAVITAZIONALE IN PICCOLO" È CONSERVATIVO PERCHÈ IL LAVORO PER SALIRE NEL CAMPO DA h_A AD h_B È PARI A $L = mg\,\Delta h = mg(h_A - h_B) = U_A - U_B$, DOVE $U = mgh$ È DEFINITA COME ENERGIA POTENZIALE, IN MODO CHE IL LAVORO DIPENDE SOLO DAL PUNTO INIZIALE E DAL PUNTO FINALE. DIMOSTRIAMO CHE ANCHE IL "CAMPO GRAVITAZIONALE IN GRANDE" È CONSERVATIVO.



PER CALCOLARE IL LAVORO COMPIUTO CONTRO IL CAMPO GRAVITAZIONALE PER PORTARE LA MASSA m DA A A B (VEDI FIGURA) È PARI A $L = \vec{F}_G \cdot \vec{s}$; MA QUALE FORZA PER QUALE SPOSTAMENTO, DAL MOMENTO CHE, NEL CAMPO GRAVITAZIONALE IN GRANDE, LA FORZA DI GRAVITÀ CAMBIA DA PUNTO A PUNTO?

ALLO SCOPO, DIVIDIAMO IL PERCORSO $\widehat{AB}$ IN TANTI INTERVALLINI $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, COSÌ PICCOLI CHE OGNUNO DI ESSI PUÒ RAPPRESENTARE UN CAMPO GRAVITAZIONALE IN PICCOLO, CIOÈ CON FORZA DI GRAVITÀ $F_1, F_2, \dots, F_n$ PRESSOCHÈ COSTANTE. SI HA COSÌ:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{s}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{s}_n$$

MA IL LAVORO È PARI AL PRODOTTO SCALARE TRA FORZA E SPOSTAMENTO, CIOÈ AL PRODOTTO DELLA FORZA PER LA COMPONENTE DELLO SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DELLA FORZA. MA LA FORZA È TUTTA RADIALE, PER CUI BASTA MOLTIPLICARE IL MODULO DELLA FORZA PER LO SPOSTAMENTO RADIALE (L'"INNALZAMENTO DI QUOTA") DEL PUNTO. SI HA COSÌ:

$$L = \sum_{i=1}^{n} F_i\,\Delta r_i = F_1\,\Delta r_1 + F_2\,\Delta r_2 + \dots + F_n\,\Delta r_n$$

MA $\Delta r_1 = r_1 - r_A$, $\Delta r_2 = r_2 - r_1$, ECCETERA, DOVE r_K È LA DISTANZA DEL PUNTO K DAL CENTRO DELLA TERRA. COME DISTANZA DALLA TERRA DI OGNI INTERVALLINO POSSIAMO ASSUMERE LA <u>MEDIA GEOMETRICA</u> $r = \sqrt{r_K r_{K+1}}$ DELLE DISTANZE DEI SUOI DUE ESTREMI, PER CUI:

$$L = G\frac{Mm}{(\sqrt{r_A r_1})^2}(r_1 - r_A) + G\frac{Mm}{(\sqrt{r_2 r_1})^2}(r_2 - r_1) + \dots + G\frac{Mm}{(\sqrt{r_n r_B})^2}(r_B - r_n)$$

MA $\dfrac{r_1 - r_A}{r_A r_1} = \dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_1}$ $(r_1 > r_A)$, E COSÌ VIA MUTATIS MUTANDIS, PER CUI, SE METTO IN EVIDENZA (GMm) TRA TUTTI I TERMINI HO:

$$L = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \cancel{\frac{1}{r_1}} + \cancel{\frac{1}{r_1}} - \cancel{\frac{1}{r_2}} + \cancel{\frac{1}{r_2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{r_n}} + \cancel{\frac{1}{r_n}} - \frac{1}{r_B}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

CIOÈ $L = \dfrac{GMm}{r_A} - \dfrac{GMm}{r_B}$. CHIAMANDO $\left(G\dfrac{Mm}{r}\right)$ <u>ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE</u> A DISTANZA r, HO CHE IL LAVORO DIPENDE SOLO DAL VALORE DELL'ENERGIA POTENZIALE NEL PUNTO INIZIALE E FINALE, CIOÈ ANCHE IL CAMPO GRAVITAZIONALE IN GRANDE È CONSERVATIVO. IL PROCEDIMENTO CHE HA PORTATO A RICAVARE L'ENERGIA POTENZIALE DALLA FORZA SI CHIAMA <u>INTEGRAZIONE</u>.