LUNGHEZZA, MASSA E TEMPO DI PLANCK

VOGLIAMO DETERMINARE UN'UNITÀ NATURALE DI LUNGHEZZA, RICAVATA DALLE COSTANTI FONDAMENTALI DELLA FISICA, E CHE POSSA SERVIRE COME UNITÀ DI MISURA PER TUTTE LE LUNGHEZZE DELL'UNIVERSO. ANZITUTTO STABILIAMO QUALI COSTANTI USARE: LA VELOCITÀ DELLA LUCE c, FONDAMENTALE NELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ; LA COSTANTE DI PLANCK h CHE È BASILARE NELLA MECCANICA QUANTISTICA, E LA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE G, UNO DEI FONDAMENTI DELLA FISICA CLASSICA.
LA FORMULA PIÙ GENERICA CHE PUÒ RESTITUIRE LA l RICHIESTA È:

$$l = c^p G^q h^r$$

DOVE p, q, r SONO ESPONENTI REALI DA DETERMINARE. SI SA CHE:

$$[l] = [m], \quad [c] = [m\,s^{-1}], \quad [G] = \left[\frac{N\,m^2}{kg^2}\right] = [m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}], \quad [h] = [m^2\,kg\,s^{-1}]$$

PERCIÒ LA FORMULA DIMENSIONALMENTE FUNZIONA SE:

$$[m] = [m^p\,s^{-p}\,m^{3q}\,kg^{-q}\,s^{-2q}\,m^{2r}\,kg^{r}\,s^{-r}]$$

OVVERO SE:

$$[m] = [m^{p+3q+2r}\,kg^{-q+r}\,s^{-p-2q-r}]$$

QUESTO RICHIEDE CHE:

$$\begin{cases} 1 = p + 3q + 2r \\ 0 = -q + r \\ 0 = -p - 2q - r \end{cases} \quad \text{DA CUI:} \quad \begin{cases} p = -3/2 \\ q = 1/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$$

E QUINDI: $l = c^{-3/2} G^{1/2} h^{1/2}$ CHE SI PUÒ SCRIVERE: $\boxed{l = \sqrt{\dfrac{G h}{c^3}}}$

ESSA PRENDE IL NOME DI LUNGHEZZA DI PLANCK E VALE $l_P = 1{,}616252 \cdot 10^{-35}\,m$

SI TRATTA DI UN VALORE ENORMEMENTE PIÙ PICCOLO DELLE DIMENSIONI DI UN NUCLEO ATOMICO (CIRCA $10^{-15}\,m$). A QUESTA COSTANTE PUÒ ESSERE ATTRIBUITO UN SIGNIFICATO FISICO? SÌ. LA LUNGHEZZA D'ONDA COMPTON DI UNA PARTICELLA VALE $\lambda_C = \dfrac{h}{mc}$. ESSA È PARI ALLA LUNGHEZZA D'ONDA DI UN FOTONE LA CUI ENERGIA È PARI ALLA MASSA A RIPOSO DELLA PARTICELLA: $mc^2 = h f_C = h \dfrac{c}{\lambda_C}$ DA CUI $\lambda_C = \dfrac{h}{mc}$

SI PUÒ DUNQUE IMPORRE UN LIMITE SUPERIORE ALLA FREQUENZA, CIOÈ UN LIMITE INFERIORE ALLA LUNGHEZZA D'ONDA COMPTON, SE IMPONGO UN LIMITE SUPERIORE ALLA MASSA m. COME FARE? (→)

(→) SI PUÒ IMPORRE UN LIMITE SUPERIORE ALLA MASSA QUANDO LA MIA PARTICELLA RAGGIUNGE LE DIMENSIONI DI UN BUCO NERO, PERCHÉ AL DI SOPRA DI TALE LIMITE LA MATERIA SCOMPARE DENTRO L'ORIZZONTE DEGLI EVENTI. ORA, IL RAGGIO DI SCHWARZSCHILD DI UN BUCO NERO È DATO DA:

$$R_S = \frac{G m}{c^2}$$

DOVE m È LA MASSA DEL BUCO NERO. SE λ_c DEVE COINCIDERE CON IL RAGGIO DI SCHWARZSCHILD, m VARRÀ:

$$m = \frac{h}{\lambda_c \cdot c} \quad (*) \quad , \quad \text{DA CUI} \quad \lambda_c = \frac{G}{c^2} \frac{h}{\lambda_c c}$$

E QUINDI $\lambda_c = \sqrt{\frac{G h}{c^3}}$. QUESTA È PROPRIO L'ESPRESSIONE DELLA LUNGHEZZA DI PLANCK TROVATA PRIMA. NE CONSEGUE CHE LA LUNGHEZZA DI PLANCK È LA MISURA DEL RAGGIO DELL'ORIZZONTE DEGLI EVENTI DI UN FOTONE LA CUI MASSA DINAMICA CORRISPONDE ALLA MASSIMA ENERGIA (TRAMITE L'EQUAZIONE $E = m c^2$) CHE ESSO PUÒ AVERE PRIMA DI "COLLASSARE" SOTTO FORMA DI MASSA. TALE MASSA SI PUÒ RICAVARE DALLA (*) E VALE:

$$m_P = \frac{h}{c\sqrt{\frac{G h}{c^3}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{G h}{c}}} = h\sqrt{\frac{c}{G h}} = \sqrt{\frac{c h}{G}}$$

ESSA SI CHIAMA MASSA DI PLANCK, ED È LA MASSA CHE DÀ LUOGO AD UN BUCO NERO DELLE DIMENSIONI DELLA LUNGHEZZA DI PLANCK. ESSA VALE:

$$m_P = 5,45549 \cdot 10^{-8}\ Kg$$

RIPETENDO I CALCOLI PER TROVARE UN TEMPO FONDAMENTALE BASATO SULLE TRE COSTANTI FONDAMENTALI c, G, h SI TROVEREBBE:

$$t_P = \sqrt{\frac{h G}{c^5}} = 5,391 \cdot 10^{-44}\ s$$

ESSO È IL TEMPO IMPIEGATO DA UN FOTONE PER ATTRAVERSARE UNA LUNGHEZZA DI PLANCK, ED È L'UNITÀ NATURALE DEI TEMPI. NON ESISTE ANCORA LA PROVA CHE l_P, m_P E t_P RAPPRESENTINO LE LUNGHEZZE, MASSE E TEMPI PIÙ PICCOLI CHE POSSANO ESSERE MISURATI. DI CERTO LA LUNGHEZZA DI PLANCK È FONDAMENTALE NELLA COSIDDETTA TEORIA DELLE STRINGHE, IN CUI È DEFINITA COME IL MINIMO DIAMETRO POSSIBILE DI UNA STRINGA; SE COSÌ FOSSE, DAVVERO OGNI MISURA INFERIORE ALLA LUNGHEZZA DI PLANCK PERDEREBBE SIGNIFICATO FISICO E LO SPAZIO-TEMPO SAREBBE DOMINATO DAGLI EFFETTI QUANTISTICI, CHE GLI CONFERIREBBERO UNA STRUTTURA "SCHIUMOSA".