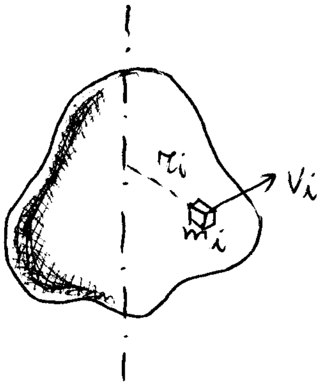
MOMENTO D'INERZIA



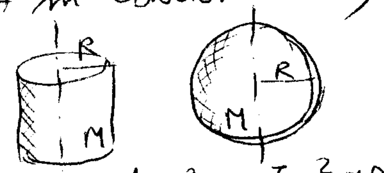
SIA UN CORPO ESTESO CHE RUOTA ATTORNO AL PROPRIO ASSE (UN CORPO PUNTIFORME NON PUÒ RUOTARE SU SE' STESSO). QUAL È LA SUA ENERGIA CINETICA? SUDDIVIDIAMOLO IN TANTI ELEMENTINI (CHE POSSONO COINCIDERE CON LE MOLECOLE) ED INDICHIAMOLI CON LE LETTERE 1, 2, 3, ... n. IL GENERICO ELEMENTINO È SEGNA= LATO DALLA LETTERA i. L'ENERGIA COMPLESSIVA DOVUTA ALLA ROTAZIONE È LA SOMMA DELLE ENERGIE CINETICHE DI TUTTI GLI ELEMENTINI:

$$E_C^{ROT} = \sum_{i=1}^{n} E_{C_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

MA $v_i = \omega r_i$, DOVE ω È LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL CORPO, COMUNE A TUTTI I SUOI ELEMENTINI (MENTRE LA VELOCITÀ v_i CAMBIA DA ELEMENTINO A ELEMENTINO). SI HA COSÌ:

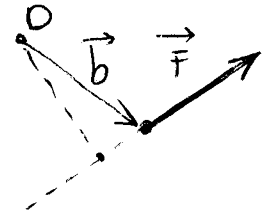
$$E_C^{ROT} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) = \boxed{\frac{1}{2}\omega^2 I}$$

PER DEFINIZIONE, LA SOMMATORIA TRA PARENTESI VIENE CHIAMATA MOMENTO D'INERZIA E RAPPRESENTA L'INERZIA DI UN CORPO IN ROTAZIONE: L'EQUIVALENTE DUNQUE DELLA MASSA NEL MOTO TRASLATORIO. SI NOTI CHE, IN QUEST'ULTIMO CASO, L'ENERGIA CINE= TICA TRASLAZIONALE È $\frac{1}{2}mv^2$: DUNQUE NEL CASO ROTAZIONALE A m CORRISPONDE I, E A v CORRISPONDE ω. IL MOMENTO D'INERZIA È DIFFICILIS= SIMO DA CALCOLARE (OCCORRE UN INTEGRALE), COMUNQUE ALLA PAGINA 320 DEL WILSON-BUFFA V'È UNA LISTA COMPLETA DI MO= MENTI D'INERZIA.

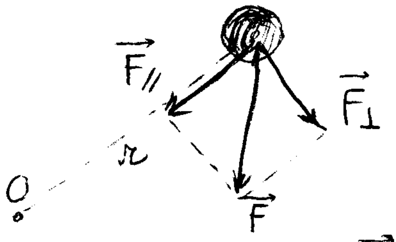


$I = \frac{1}{2}MR^2$ $\qquad$ $I = \frac{2}{5}MR^2$

VEDIAMO ORA DI RICOSTRUIRE IL 2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA PER IL MOTO ROTATORIO. OCCORRE INTRODURRE IL CONCETTO DI MOMENTO DI UNA FORZA, DEFINITO COSÌ: $\boxed{\vec{M} = \vec{b} \wedge \vec{F}}$



DOVE $\vec{b}$ È IL BRACCIO, CIOÈ LA CONGIUNGENTE IL PUNTO DI AP= PLICAZIONE DELLA FORZA CON UN PUNTO O DETTO CENTRO O POLO. IL MOMENTO SI MISURA IN $[N \cdot m]$, ED È NULLO SE IL POLO PASSA PER IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA; INOLTRE È SEMPRE PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DA FORZA E POLO. ESSO, NEL MOTO ROTATORIO, È L'EQUIVALENTE DELLA FORZA NEL MOTO TRASLATORIO. COME UN CORPO È IN EQUILIBRIO TRASLATORIO SE $\sum_i \vec{F}_i = 0$, CIOÈ SE LA RISULTANTE DELLE FORZE È NULLA, È IN EQUILIBRIO ROTATORIO INVECE SE $\sum_i \vec{M}_i = 0$. VEDIAMO ALLORA COME VARIA IL 2° PRINCIPIO.



OSSERVIAMO LA FIGURA A DESTRA. IL MOMENTO DI $\vec{F}$ RI= SPETTO A $\vec{F}$ È:

$$\vec{M} = \vec{b} \wedge \vec{F} = \vec{b} \wedge (\vec{F}_{/\!/} + \vec{F}_\perp) = \vec{b} \wedge \vec{F}_{/\!/} + \vec{b} \wedge \vec{F}_\perp$$

MA $\vec{b} \wedge \vec{F}_{/\!/} = 0$, ESSENDO DUE VETTORI PARALLELI (ED IL SENO DI ZERO È ZERO). NE SEGUE $\vec{M} = \vec{b} \wedge \vec{F}_\perp$. SIA r IL MODULO DEL BRACCIO $\vec{b}$. ALLORA:

$$|\vec{M}| = F_\perp r = m a_t r = m(\alpha r) r = m \alpha r^2$$

PERCHÈ $\vec{F}_\perp$ È PERPENDICOLARE A $\vec{b}$, E $\sin 90° = 1$; a_t È L'ACCELERAZIONE TANGEN= ZIALE, α QUELLA ANGOLARE ($a_t = \alpha r$). SE QUESTO È SOLO UNO DEGLI ELEMENTINI CHE COMPONGONO UN CORPO ESTESO, SI HA:

$$M_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha r_i^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \alpha I, \quad \text{DA CUI} \quad \boxed{M = \alpha I}$$