QUADRATURA DEL CERCHIO

Gallarate, 5 ottobre 2006 S. N.

PREMESSA

L'insegnamento di una disciplina ha tre finalità:

- Formativa (metodo).
- Informativa (contenuti).
- Orientativa (Prerequisiti necessari per studi specialistici, principali sviluppi attuali...).

Secondo i periodi storici, i paesi e le caratteristiche intrinseche della disciplina, qualcuna delle finalità può prevalere sulle altre.

I TERMINI DELLA QUESTIONE

PROBLEMA DELLA QUADRATURA DEL CERCHIO

Dato un cerchio, costruire -con *riga e compasso* e con un numero finito di passaggi- un quadrato con area uguale a quella del cerchio.

Il problema fu proposto per la prima volta da Anassagora [500-428 a.C].

La prova dell'impossibilità è del 1882 e segue da un teorema dimostrato dal matematico tedesco Ferdinand Lindemann [1852-1939].

FORMULAZIONE EQUIVALENTE

Un modo equivalente di presentare il problema della quadratura del cerchio è il seguente.

Data una circonferenza, costruire - con riga e compasso e con un numero finito di passaggi- un segmento di lunghezza uguale a quella della circonferenza.

LA CITAZIONE DI DANTE

Qual è 'l geometra che tutto s'affigge
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio onde'elli indige
(Paradiso, XXXIII, 135)

LE RADICI DELLA NOSTRA CULTURA

Fra la fine del VII se. a.C. e il VI secolo si svilupparono le città-stato greche, fra queste in particolare Sparta ed Atene.

Specialmente ad Atene, dopo la riforma di Solone, si arrivò gradualmente a realizzare una democrazia diretta, anche se incompleta: i cittadini partecipavano personalmente alle assemblee e si difendevano da soli in tribunale. Divenne, quindi, importane lo studio del linguaggio e della logica. Si studiava: grammatica, musica e danza, retorica (arte del parlare bene), dialettica (arte del persuadere).

...E QUELLE DELLA NOSTRA MATEMATICA

Luoghi di vita tipici erano, infatti, la piazza, il teatro, l'assemblea. Il modello culturale ateniese si affermò presto in tutto il mondo ellenico, al di là delle vicende politiche e militari.

In questo contesto, la matematica ebbe un grande sviluppo e acquistò un ruolo fondamentale per la sua valenza *formativa*: significativa, per tutte, la posizione di Platone [428 a.C.-348 a.C.]: *non entri chi non sa la geometria...*

UN MODELLO RIGOROSO

Conosciamo le opere e le scoperte dei maggiori matematici greci. Da esse ricaviamo un preciso modello di indagine matematica:

- *Una proprietà deve essere sempre dimostrata.*
- *Le questioni geometriche sono indipendenti dal concetto di "misura" e quindi di numero.*
- *La misurazione di una grandezza geometrica è un'operazione concettuale non legata all'uso di strumenti graduati.*

IL RUOLO DI RIGA E COMPASSO

- Il compasso serve a trasportare segmenti
- La riga (non graduata) serve a congiungere due punti

ESEMPI DI COSTRUZIONI GEOMETRICHE

- Il punto medio di un segmento
- La bisettrice di un angolo
- La perpendicolare per un punto ad una retta
- Il triangolo con tre lati assegnati.
- Dividere un segmento in n parti uguali

PROBLEMI CLASSICI DELLA MATEMATICA GRECA

- Duplicazione del quadrato: ha soluzione.
- Duplicazione del cubo: non ha soluzione; impossibilità dimostrata dal matematico parigino Pierre Laurent Wantzel [1814-1848] nel 1837.
- Trisezione dell'angolo qualsiasi; impossibilità dimostrata dal matematico parigino Pierre Laurent Wantzel [1814-1848] nel 1837.
- Costruzione del poligono regolare di n lati; in generale è un problema aperto non si sa se è risolvibile o no. Per qualche caso particolare di n la soluzione era nota ai greci. Gauss ha dato un importante contributo (in particolare con l'eptadecagono).
- Quadratura del cerchio.
- Rettificazione della circonferenza

ESEMPIO DI RETTIFICAZIONE (1)

La lunghezza della semicirconferenza è data approssimativamente dalla somma dei lati del quadrato e del triangolo equilatero inscritti nel cerchio.

ESEMPIO DI RETTIFICAZIONE (2)

Dato un cerchio, si divide il suo diametro *AB* in cinque parti uguali, si prolunghi *AB* di un segmento *BC* eguale a una di queste quinte parti; e sulla tangente in *A* si prenda il segmento *AD* eguale a tre di queste parti. Il perimetro del triangolo *ACD* è approssimativamente uguale alla lunghezza della circonferenza.

MORBO CICLOMETRICO

In oltre 2000 anni molte persone hanno pensato, erroneamente, di aver trovato una quadratura esatta del cerchio. Persino il filosofo inglese Thomas Hobbes, nel 1665, si illuse di essere riuscito nell'impresa.

Nel 1775 la Reale Accademia delle Scienze di Parigi ufficializzò la decisione di non prendere più in esame "soluzioni" del problema della rettificazione.

È incredibile ma perfino dopo la dimostrazione di Lindemann sono apparsi libri con la pretesa dell'autore di aver trovato la soluzione del classico problema (ad esempio un tale Heisel, negli USA, nel 1931).

COME VA A FINIRE?

Teorema

Data una circonferenza qualsiasi,

- prefissato un segmento *k*, per quanto piccolo, si possono sempre costruire due poligoni, l'uno inscritto, l'altro circoscritto alla data circonferenza e tali che la differenza fra i loro perimetri risulti minore del segmento prefissato *k*;
- prefissato un poligono *K*, per quanto piccolo, si possono sempre costruire due poligoni, l'uno inscritto, l'altro circoscritto alla data circonferenza e tali che la loro differenza risulti minore del prefissato poligono *K*.

...continua

Teorema

- Data una circonferenza, esiste un unico segmento che sia maggiore dei perimetri di tutti i poligoni (convessi) inscritti e minore dei perimetri di tutti quelli circoscritti.

Definizione

- Data una circonferenza, il segmento maggiore dei perimetri di tutti i poligoni (convessi) inscritti e minore dei perimetri di tutti quelli circoscritti si chiama *segmento rettificante* la circonferenza (o *circonferenza rettificata*). La lunghezza di questo segmento si dice *lunghezza della circonferenza.*

...IL PUNTO DI ARRIVO

Teorema

- Le lunghezze di due circonferenze stanno fra loro come i rispettivi raggi.

Corollario

- La lunghezza di una circonferenza sta a quella del rispettivo diametro in un rapporto costante, dato da un numero irrazionale, denotato con

  $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95.$

QUANDO INTERVENGONO I NUMERI

I numeri si introducono: per contare, per ordinare, per indicare il rapporto fra due grandezze omogenee e quindi, più in generale, per misurare.

Secondo i casi si ottengono i vari tipi di numeri: interi, razionali irrazionali quadratici, irrazionali non quadratici, trascendenti.

I numeri interi, razionali o irrazionali quadratici si dicono numeri costruibili.

Il numero π è trascendente, e quindi non costruibile.

E VENNE L'INFORMATICA...

CABRI'

PERSONAGGI E INTERPRETI I GRECI

- Pitagora [Samo 572 a.C. - Metaponto 500 a.C.]
- Euclide [Alessandria, 300 a. C. circa]
- Archimede [Siracusa 287 a.C.-212 a.C.]
- Apollonio di Perge [262 a.C. circa 180 a.C
- Diofanto [Alessandria 250 d.C. circa?]

PERSONAGGI E INTERPRETI GLI ALGEBRISTI

- Al Khuwarizmi Muhammad [800 d.C. circa, Bagdad]
- Tartaglia Niccolò [Brescia 1499- Venezia 1557]
- Cardano Gerolamo [Pavia 1501- Roma 1576]
- Viete Francois [1540-1603, Francia]

PERSONAGGI E INTERPRETI I MODERNI

- Descartes (Cartesio) Renè [1596-1650, Francia]
- Ruffini Paolo [Modena 1765, 1822]

- Abel Niels [1802, 1829, Norvegia]
- Gauss Carlo Federico [1777-1855, Germania]
- Dedekind Julius [1831-1919, Germania]
- Cantor George [1845-1918, Germania]