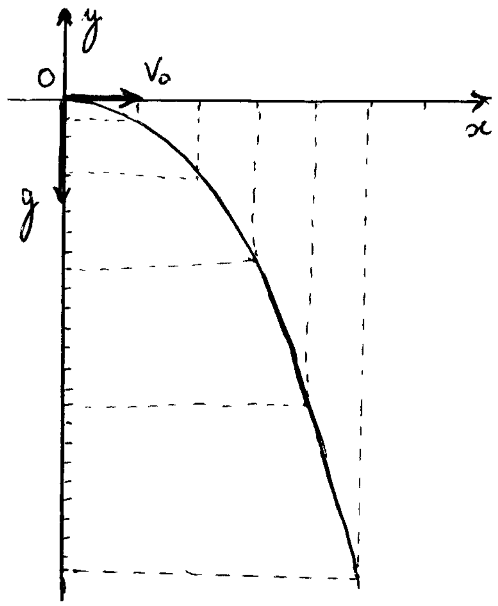
MOTO PARABOLICO



SIA UN PUNTO MATERIALE LANCIATO DALL'ORIGINE CON VELOCITÀ DIRETTA LUNGO L'ASSE x. ESSO È SOGGETTO ALL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ, CHE È DIRETTA INTERAMENTE VERSO IL BASSO.
SE NE DEDUCE CHE IL MOTO LUNGO L'ASSE x È RETTILINEO UNIFORME, NON ESSENDOCI COMPONENTE ORIZZONTALE DELL'ACCELERAZIONE, MENTRE IL MOTO LUNGO L'ASSE y È UNIFORMEMENTE ACCELERATO.
LE LEGGI ORARIE LUNGO I DUE ASSI SONO PERCIÒ:

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

(IL MENO È DOVUTO AL FATTO CHE g È DIRETTA VERSO IL BASSO, L'ASSE y VERSO L'ALTO). SONO EQUAZIONI PARAMETRICHE, PERCHÈ x E y SONO ENTRAMBE FISSATE IN FUNZIONE DEL TEMPO. SE ELIMINIAMO IL TEMPO TROVIAMO LA RELAZIONE TRA y E x, CIOÈ L'EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA. DALLA PRIMA SI RICAVA $t = x/V_0$ LA SOSTITUISCO NELLA SECONDA:

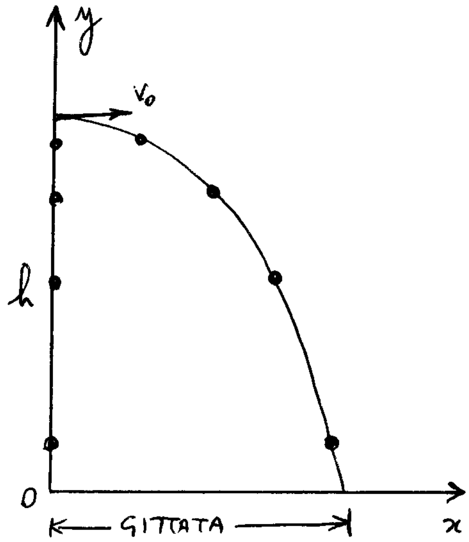
$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} = -\frac{g}{2V_0^2} x^2$$

QUESTA È L'EQUAZIONE DI UNA <u>PARABOLA</u>. DUNQUE IL MOTO DI UN PROIETTILE È PARABOLICO.
SI CHIAMA <u>GITTATA</u> LA DISTANZA PERCORSA DAL PROIETTILE DOPO UN CERTO TEMPO, O PRIMA DI RICADERE AL SUOLO. SUPPONIAMO CHE IL PROIETTILE NON PARTA DALL'ORIGINE, MA UN PUNTO A QUOTA $(0; h)$. ALLORA L'EQUAZIONE VERTICALE È:

$$\boxed{y = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

SOSTITUENDO $t = x/V_0$ SI TROVA:

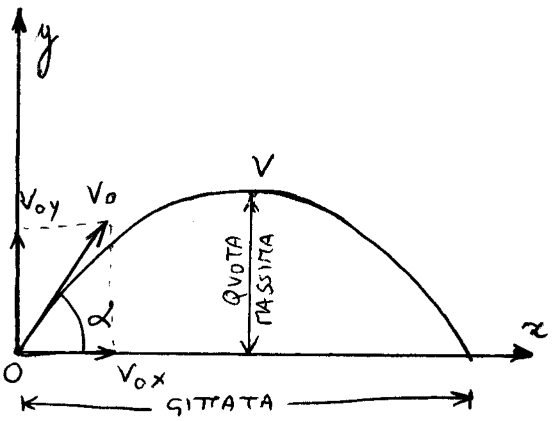
$$y = h - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$



CHE È L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA CON IL VERTICE NEL PUNTO $(0; h)$. PER TROVARE LA GITTATA, ESSA VA INTERSECATA CON L'ASSE x. METTENDO A SISTEMA LA PRECEDENTE CON $y = 0$ SI HA L'EQUAZIONE:

$$0 = h - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$

DA CUI $\boxed{x = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ È LA MISURA DELLA <u>GITTATA</u>. DA $x = V_0 t$ SI RICAVA ANCHE IL <u>TEMPO DI VOLO</u>: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. È LO STESSO IMPIEGATO DALLA MASSA A CADERE IN VERTICALE. ED È GIUSTO, PERCHÈ LA GRAVITÀ HA SOLO COMPONENTE VERTICALE!



CONSIDERIAMO ORA UN LANCIO CON ALZO DIVERSO DA ZERO. LA VELOCITÀ INIZIALE È ALLORA:

$$\vec{V_0} = V_0 \cos\alpha \, \vec{i} + V_0 \operatorname{sen}\alpha \, \vec{j}$$

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ È LA COMPONENTE ORIZZONTALE,
$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha$ È LA COMPONENTE VERTICALE.
V_{0x} È COSTANTE ORIZZONTALMENTE, PERCHÉ g HA SOLO UNA COMPONENTE VERTICALE, MENTRE V_{0y} È LA VELOCITÀ INIZIALE IN VERTICALE.

SE NE DEDUCE CHE LE DUE LEGGI ORARIE DEL MOTO LUNGO x ED y SONO:

$$\begin{cases} x = V_{0x}\, t = V_0 \cos\alpha \, t \\ y = V_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = V_0 \operatorname{sen}\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

DALLA PRIMA SI RICAVA $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha}$. LA SOSTITUISCO NELLA SECONDA:

$$y = x \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \qquad (*)$$

SI TRATTA DELL'EQUAZIONE ANCORA DI UNA PARABOLA, MA NON PIÙ CON IL VERTICE NELL'ORIGINE DEGLI ASSI, BENSÌ PASSANTE PER L'ORIGINE.

TROVIAMO LA GITTATA: BASTA INTERSECARE LA (*) CON L'ASSE x. PONENDO IN ESSA $y=0$ SI TROVANO DUE SOLUZIONI: $x=0$ (IL PUNTO DI PARTENZA) OPPURE:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2\alpha} x = 0 \qquad \text{DA CUI} \qquad \boxed{x = \frac{2 V_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g}} \qquad (**)$$

IL TEMPO DI VOLO SI RICAVA DA $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha} = \dfrac{2 V_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$

E LA QUOTA MASSIMA RAGGIUNTA? È RAPPRESENTATA DALL'ORDINATA DEL VERTICE. LA SUA ASCISSA È LA METÀ DELLA GITTATA, PER MOTIVI DI SIMMETRIA.

SOSTITUENDO $x_V = \dfrac{V_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g}$ NELLA PARABOLA SI HA:

$$y_V = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cancel{\cos\alpha}}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} - \frac{\cancel{g}}{2 \cancel{V_0^2} \cancel{\cos^2\alpha}} \cdot \frac{V_0^{\cancel{4}\,2} \operatorname{sen}^2\alpha \cancel{\cos^2\alpha}}{g^2} = \boxed{\frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}}$$

A QUALE ALZO CORRISPONDE LA MASSIMA GITTATA? SICCOME $2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$, LA (**) SI PUÒ RISCRIVERE $x = \dfrac{V_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$

$\operatorname{sen} 2\alpha$ HA IL VALORE MASSIMO (PARI AD 1) QUANDO $2\alpha = 90°$, CIOÈ QUANDO $\alpha = 45°$. LA MASSIMA GITTATA SI HA PER $\alpha = 45°$. ECCO PERCHÉ, COME SI DICE DI SOLITO, CHE LA RANA SALTA A 45°, ONDE MASSIMIZZARE L'EFFICIENZA DEL SALTO.