OPERAZIONI BINARIE E LORO PROPRIETÀ

DEF. SI DICE OPERAZIONE BINARIA SU DI UN INSIEME A NON VUOTO UNA RELAZIONE CHE AD OGNI COPPIA DI ELEMENTI a, b DI A ASSOCIA UN UNICO ELEMENTO DI $c \in A$; a E b SI DICONO I TERMINI DELL'OPERAZIONE, E c SI DICE IL RISULTATO. IN SIMBOLI:

$$a * b = c$$ (LEGGASI "STAR")

ES. LA DISGIUNZIONE DI PROPOSIZIONI E L'UNIONE DI INSIEMI SONO OPERAZIONI BINARIE.

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

a) COMMUTATIVA: $a * b = b * a$

b) ASSOCIATIVA: $(a * b) * c = a * (b * c)$

c) ELEMENTO NEUTRO: SI DICE CHE u È L'ELEMENTO NEUTRO DI $*$ SE:

$$a * u = u * a = a$$

d) INVERTIBILITÀ: SI DICE CHE $b \in A$ È L'ELEMENTO SIMMETRICO DI $a \in A$ SE $a * b = b * a = u$

SE UN'OPERAZIONE È TALE CHE OGNI ELEMENTO DELL'INSIEME SU CUI È DEFINITA HA UN SOLO SIMMETRICO, L'OPERAZIONE SI DICE INVERTIBILE SU QUELL'INSIEME.

ES.1 – L'ADDIZIONE SU $\mathbb{Z}$ GODE DELLE PROPRIETÀ COMMUTATIVA $(a+b = b+a)$, ASSOCIATIVA $[(a+b)+c] = [a+(b+c)]$, HA L'ELEMENTO NEUTRO CHE È LO ZERO $(a+0 = 0+a = a)$ ED OGNI ELEMENTO (NUMERO) a HA IL SIMMETRICO $-a$, PERCHÉ $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

e) DISTRIBUTIVA: DATE DUE OPERAZIONI BINARIE $*$ E Δ, SI HA:

$$(a * b) \Delta c = (a \Delta c) * (b \Delta c)$$ ($*$ RISPETTO A Δ)

ES.2 – L'ADDIZIONE SU $\mathbb{Z}$ GODE DELLA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO AL PRODOTTO: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

DEF.1 – UN INSIEME A SU CUI È DEFINITA L'OPERAZIONE $*$ CHE GODE DELLE PROPRIETÀ b), c) e d) SI DICE DOTATO DELLA STRUTTURA DI GRUPPO.

DEF.2 – UN GRUPPO SU CUI $*$ GODE ANCHE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA SI DEFINISCE GRUPPO ABELIANO.

ES.3 – L'INSIEME $\mathbb{Z}$ È TALE CHE L'ADDIZIONE GLI CONFERISCE LA STRUTTURA DI GRUPPO ABELIANO, PER QUANTO DETTO SOPRA.

DEF.3 – UN GRUPPO ABELIANO A CHE AMMETTE UNA SECONDA OPERAZIONE DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA PRIMA SI DICE ANELLO. L'ANELLO SI DICE CORPO SE POSSIEDE LA STRUTTURA DI GRUPPO ANCHE RISPETTO ALLA SECONDA OPERAZIONE; SE POI È ABELIANO ANCHE RISPETTO ALLA SECONDA OPERAZIONE, SI PARLA DI CAMPO.